

В. ГЕЙЗЕНБЕРГ

ВВЕДЕНИЕ  
В ЕДИНУЮ  
ПОЛЕВУЮ ТЕОРИЮ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
ЧАСТИЦ

**INTRODUCTION TO THE UNIFIED  
FIELD THEORY  
of  
ELEMENTARY PARTICLES**

**W. HEISENBERG**  
Max-Planck-Institut  
für Physik und Astrophysik

**INTERSCIENCE PUBLISHERS  
LONDON, NEW YORK, SYDNEY  
1 9 6 6**

В. ГЕЙЗЕНБЕРГ

---

ВВЕДЕНИЕ  
В ЕДИНУЮ  
ПОЛЕВУЮ ТЕОРИЮ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
ЧАСТИЦ

Перевод с английского  
А. И. НАУМОВА

Под редакцией  
Д. ИВАНЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“  
Москва 1968

Выдающийся современный физик-теоретик Вернер Гейзенберг последние годы много работал над построением единой теории элементарных частиц — главной, принципиально важной проблемой современной теоретической физики. Хотя путь, предложенный Гейзенбергом, не единственный (параллельно разрабатываются и имеют определенные успехи другие направления), вклад автора в решение этой сложнейшей проблемы весьма значителен. В настоящей книге систематически изложены результаты его исследований.

В основе теории Гейзенберга лежит допущение о существовании некоторого фундаментального спинорного поля, описываемого нелинейным уравнением. Возбуждения этого поля должны дать все сильно взаимодействующие частицы и фотоны. В книге рассматриваются также лептоны и затрагиваются вопросы гравитации.

Наряду с единой полевой теорией частиц в ней излагаются метод Тамма — Данкова, теория гильбертова пространства с индефинитной метрикой, теорема Голдстоуна, модель Ли и другие необходимые для развития формализма вспомогательные физические и математические вопросы.

Книга Гейзенберга является первой в мировой научной литературе монографией по единой спинорной нелинейной теории материи. Она будет интересна физикам-теоретикам, а также математикам и философам.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Один из выдающихся физиков-теоретиков нашего времени Вернер Гейзенберг (ныне директор Института Физики и Астрофизики имени Макса Планка в Мюнхене, ФРГ) приобрел широкую известность еще в 20-х годах как основатель квантовой механики в ее матричной форме (1925 г.) и автор принципа неопределенности (1927 г.). Сотрудничество со своими замечательными учителями Зоммерфельдом в Мюнхене и Борном в Геттингене, а также многолетнее общение с Нильсом Бором в Копенгагене содействовали всестороннему развитию характерных черт научного творчества Гейзенберга, отличающегося близостью к обширному эмпирическому материалу физики атома, ядра, твердого тела и элементарных частиц, использованием самых тонких средств математического формализма и глубиной трактовки философско-физических проблем.

После работ по квантовой механике (принесших ему Нобелевскую премию) и по квантовой электродинамике Гейзенберг внес большой вклад в теорию ферромагнетизма и теорию атомного ядра, в частности выдвинув впервые понятие изотопического спина. Ему принадлежит разработка теории матрицы рассеяния и множество результатов в области космических лучей, релятивистской квантовой теории поля и других. Что касается принципа неопределенности, то он вызвал многолетнюю обширнейшую дискуссию в физических и философских кругах в связи с интерпретацией квантовой теории.

Уже более десяти лет Гейзенберг не прекращает попыток построения единой теории элементарных частиц, в первую очередь адронов (сильно взаимодействующих мезонов и барионов), с включением также фотонов, а затем и лептонов. Вопрос этот приобрел большую акту-

альность, поскольку к настоящему времени открыто свыше двухсот частиц и их возбужденных состояний — резонансов (резонансов): В основу теории кладется некоторое фундаментальное поле («праматерия»), взаимодействующее само с собой и тем самым описываемое нелинейным уравнением. Это поле является по существу дираковским спинорным (соответствует квантам полуцелого спина), что необходимо для учета спиновых свойств. Его возбужденные состояния и приводят к различным реально наблюдаемым частицам. Подобная концепция в ряде отношений развивает теорию слияния де Бройля и, с другой стороны, модель составных частиц типа Ферми — Янга и Саката и может быть согласована, как оказывается, с новейшей гипотезой субчастиц — кварков. Отметим, что в работах по нелинейной спинорной теории, а также и в своих исследованиях по ядру Гейзенберг учитывал работы и советских ученых.

Разработка единой спинорной теории потребовала применения приближенного метода Тамма — Данкова, использования индефинитной метрики пространства состояний (гильбертова пространства) и, на нынешнем этапе, вырожденного вакуума, преобразующегося по нетривиальному представлению некоторых групп симметрии исходного уравнения. Все эти вопросы подробно излагаются в данной книге, являющейся первой монографией по единой спинорной нелинейной теории. Хотя разработка этой теории в группе Гейзенберга, а также рядом французских, советских и других авторов привела ко многим интересным стимулирующим выводам и ее результаты в смысле подсчета масс частиц и констант связи оказываются в некоторых случаях уже довольно близкими к эмпирическим значениям, однако, как подчеркивает сам автор, еще нет речи о законченной единой теории материи, построение которой требует дальнейших значительных усилий. В частности, на наш взгляд, необходимо учитывать гравитацию и асимметрии Вселенной на самом начальном этапе.

В конце книги приведен аннотированный список дополнительной литературы, содержащий как полезные обзоры, так и новейшие публикации.

*Д. Иваненко*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга содержит текст лекций, прочитанных автором в Мюнхенском университете в течение летнего семестра 1965 г. в надежде привлечь внимание молодого поколения физиков к современному развитию единой полевой теории элементарных частиц.

Картина, в которой элементарные частицы рассматриваются в качестве динамических систем, аналогичных стационарным состояниям сложных атомов и молекул (т. е. систем, возникающих, как и в квантовой механике, из исходного фундаментального принципа), большинству физиков долгое время не казалась привлекательной. По сути дела она противоречила термину «элементарные», который применяется к этим частицам, и не согласовывалась с надеждой на простое понимание их природы. С другой стороны, в течение примерно двадцати лет, которые прошли после первой отчетливой формулировки этой картины, она нашла подтверждение во многих экспериментах. Было открыто большое число новых частиц. Их спектр и правила отбора при переходах аналогично тому, как это делалось с оптическими спектрами атомов, были успешно описаны квантовыми числами. Конкретная математическая форма фундаментального закона природы, предложенная в 1958 г., подтвердилась последующим открытием  $\eta$ -мезона, определением констант связи и, сравнительно недавно, появлением возможности связать фотон (а тем самым и электродинамику) с вырождением основного состояния, теоремой Голдстоуна и существованием «странных» частиц. Эти результаты оправдывают попытку изложить основные идеи единой полевой теории в простой форме,

доступной пониманию даже тех физиков, которые не являются специалистами в области элементарных частиц.

Поэтому в наших лекциях основной упор был сделан на физические идеи и в гораздо меньшей степени — на математический аппарат. При теперешнем состоянии теории было бы преждевременно начинать с полной системы аксиом и продвигаться вперед при помощи строгих выводов. Сейчас требуется лишь такое математическое описание, которое приспособлено к данной экспериментальной ситуации и не содержит видимых противоречий. В дальнейшем его можно будет развить в математически строгую систему. История физики напоминает нам, что обычно всякая новая теория формулировалась строго лишь после решения всех существенных физических проблем. Эти лекции обрисовывают именно общие контуры искомой математической схемы и не включают доказательств существования и сходимости; вместе с тем они содержат некоторые простейшие вычисления собственных значений для масс и расчеты констант связи. Гораздо более глубокое и подробное изложение математических проблем теории будет дано в книге Дюрра, который сам принимал активное участие в ее развитии. Обзор динамических аспектов теории был недавно сделан Рампахером, Штумпфом и Вагнером [127].

Математический аппарат содержит ряд необычных сторон, которые раньше представляли некоторые трудности для понимания. Речь идет об индефинитной метрике в гильбертовом пространстве и о вырождении основного состояния. Однако в последние годы индефинитная метрика изучалась в связи с вариантом квантовой электродинамики Гупта — Блейлера и в связи с моделью Ли, а вырождение основного состояния играет важную роль в современной физике твердого тела. Так что эти расширения рамок обычной квантовой механики не должны представляться слишком сложными. Они подробно обсуждаются в тексте.

Феноменологические теории, в общем успешно наводящие некоторый порядок в запутанном эмпирическом материале (а именно дисперсионные соотношения, полюса Редже, группы унитарных преобразований, подобные



$SU_3$  и  $SU_6$ , и т. д.), в этих лекциях подробно не рассматриваются. Существует ряд хороших книг, по которым их можно изучить. Путь, на котором эти теории могут быть, по-видимому, связаны с результатами единой полевой теории, описан в последних главах данной книги. Именно здесь еще раз ощущается, что единая полевая теория находится лишь на первой стадии своего развития и многие сложные проблемы нуждаются в дальнейшей разработке. В области сильных взаимодействий, электромагнетизма, слабых взаимодействий и гравитации, если рассматривать их с точки зрения этой теории, еще остаются широкие возможности для исследования.

Автор весьма обязан д-ру Бу-Дуи-Квангу за большую помощь, оказанную при подготовке рукописи, сотрудникам Института физики и астрофизики имени Макса Планка за множество ценных рекомендаций при обсуждениях и вычислительной группе института за выполнение численных расчетов.

Ч. Кеннеди



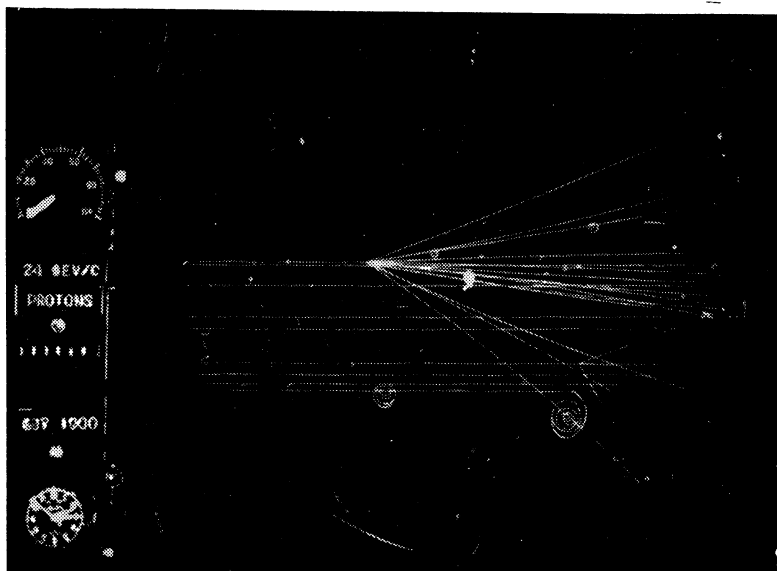
# ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

## § 1. Определение элементарной частицы

Около пятидесяти лет назад были известны всего три типа «элементарных частиц». Считалось, что электрон и протон являются мельчайшими элементами вещества, а фотон — минимальной порцией энергии излучения. Эта концепция «мельчайшего элемента» возникла из представлений о делимости материи. Механическим или химическим путем кусок вещества можно разложить на отдельные атомы. Атом разделяется на ядро и окружающие его электроны. Атомное ядро можно расщепить на протоны и нейтроны. О «мельчайших элементах» можно говорить лишь в том случае, если они не делятся на еще более мелкие части.

Единственными процессами, в которых можно было бы ожидать расщепления элементарных частиц, являлись их столкновения при очень высоких энергиях. Именно для изучения таких столкновений и предназначались большие ускорители, построенные в Беркли, Дубне, Женеве и Брукхейвене. Проводимые на них эксперименты показали, что при соударении двух частиц высокой энергии действительно может появиться множество других частиц; однако они совсем не обязательно являются более мелкими, чем частицы сталкивающиеся. Наоборот, оказывается, что независимо от природы последних рождаются частицы всегда одних и тех же типов. Более точно это явление можно описать следующими словами: большая кинетическая энергия соударяющихся частиц превращается в вещество, в появляющиеся частицы («множественное рождение частиц» [1, 2]). На фиг. 1 изображена фотография, сделанная с помощью пузырьковой камеры женевского протонного синхротрона. Она демонстрирует типичный случай

множественного рождения. Таким образом, принимая форму элементарных частиц, энергия может превратиться в вещество. Поэтому различные элементарные частицы можно рассматривать как разные формы существования фундаментальной субстанции — материи или энер-



Фиг. 1. Протон, ускоренный в синхротроне ЦЕРН до 24 Гэв, сталкивается в пузырьковой камере с ядром атома водорода и порождает пучок вторичных частиц, в основном пионов.

гии [3]. Называть эти частицы «мельчайшими элементами» можно лишь в том смысле, если части, на которые они расщепляются, не являются более мелкими, а обладают примерно теми же размерами.

Такое решение проблемы «мельчайших элементов материи» является весьма удивительным и приводит к другому вопросу, который нужно внимательно исследовать. Раньше атомы и атомные ядра рассматривались как составные системы, которые построены из множества элементарных частиц; в то же время электрон и

протон считались неделимыми, а значит, «элементарными». В описываемой ситуации такое различие представляется довольно искусственным. В самом деле, вряд ли существует какое-нибудь хорошее определение, с помощью которого можно отличить «элементарную» частицу от составной системы. Так, например, пион можно рассматривать как систему, состоящую из одной или нескольких нуклон-антинуклонных пар, нуклон можно построить из  $\Lambda$ -гиперона и  $K$ -мезона, фотон — из мюона и антимюона и т. д. Та парадоксальная ситуация, с которой мы столкнулись, очень хорошо описывается широко известной формулой: «каждая элементарная частица состоит из всех других элементарных частиц». Если для расщепления системы необходима энергия, малая по сравнению с массой покоя возникающих частей, то практически еще можно говорить, что эта система является составной. Но такое определение весьма туманно и носит не качественный, а количественный характер. Поэтому разумно вообще не делать никакого различия между элементарными частицами и составными системами.

Одной из главных причин, благодаря которой в физике элементарных частиц возникла эта новая ситуация, является возможность порождения пар, т. е. существование античастиц и антиматерии [4, 5]. Пусть волновые функции, описывающие некоторые состояния, обладают одинаковыми свойствами симметрии. Тогда их разделение становится невозможным, так как каждая из этих волновых функций будет содержать вклады всех остальных. В нерелятивистской квантовой механике из-за наличия калибровочной группы состояния с различным числом частиц имеют разные свойства симметрии, поэтому они разделимы. В релятивистской теории благодаря возможности порождения пар это будет уже не так.

Другой стороной этой ситуации является сложность физики элементарных частиц. Вряд ли теория элементарных частиц может быть проще квантовой химии; в ней не будет аналога оптического спектра атома водорода и соответствующего ему простого математического закона. Если в квантовой химии мы хотим вычислить, скажем, энергию связи двух атомов в молекуле

кислорода, то нельзя пренебрегать тем, что в процессах столкновений при высоких энергиях атомы способны ионизироваться или даже расщепляться на отдельные ядра и электроны. Поэтому мы не можем надеяться на существование простой аналитической функции, которая точно описывает межатомный потенциал и тем самым определяет энергию связи. Совершенно аналогично, нельзя вычислить массу пиона, исходя из простого нуклон-антинуклонного потенциала, — ведь анализ его поведения должен отражать тот экспериментальный факт, что при столкновении нуклона с антинуклоном, когда они обладают высокими энергиями, может породиться множество частиц. Поэтому в теории элементарных частиц проблема создания приближенных математических методов столь же важна и трудна, как и в квантовой химии.

Если различные элементарные частицы считать разными формами фундаментальной субстанции («энергии» или «материи»), то следует подчеркнуть, что зачастую они являются всего лишь переходными образованиями, обладающими очень коротким временем жизни. Некоторые из них, подобно протону, электрону или дейтрону, стабильны. Другие имеют весьма «большое» время жизни — от  $10^{-6}$  до  $10^{-16}$  сек (например, пион или  $\Omega^-$ -гиперон). Но подавляющее большинство частиц обладает временами жизни, меньшими чем  $10^{-16}$  сек (заметим, что когда в этой книге употребляется термин «масса» или «время жизни», то подразумевается, что выбрана система покоя данной частицы). Следовательно, будут существовать непрерывные переходы между состояниями с большим временем жизни, характеристики которых можно измерить с большой точностью, и между другими состояниями, время жизни которых мало и чьи свойства поэтому строго не определены. Такое положение вещей отчетливо наблюдается во всех экспериментах. Непрерывный спектр состояний не связан с определенными симметриями, например с точными значениями момента или изоспина. Дискретное стационарное состояние обладает определенными свойствами симметрии. Максимум в непрерывном спектре в зависимости от его ширины можно называть или резонансным состоянием,

или просто максимумом; ширина определяет также, можно или нельзя обнаружить его в некоторых симметриях. Возможны и все промежуточные случаи. С термином «элементарная частица» мы будем обращаться совершенно свободно, называя так все указанные образования независимо от их стабильности.

## § 2. Классификация элементарных частиц

Из сказанного должно быть уже ясно, что между спектром различных элементарных частиц и спектром стационарных состояний, существующим в квантовой теории атома, имеется тесная аналогия. Поэтому при классификации частиц естественно руководствоваться теми же самыми принципами, которые с успехом применялись в теории атома.

Очевидным отправным пунктом такой классификации является анализ тех особенностей исходного принципа и наблюдаемых данных, которые в классической физике называются «законами сохранения» (например, сохранение энергии, импульса, момента, заряда и т. д.). От математиков физики узнали, что законы сохранения связаны с симметриями, с групповой структурой исходного уравнения. Если оно инвариантно относительно определенного преобразования, то из операторов последнего можно построить наблюдаемую величину, которая остается постоянной в процессе, описываемом данным законом природы. Разные состояния системы можно рассматривать как различные представления группы. С математической точки зрения эти представления можно охарактеризовать или дискретными числами (в случае компактных групп), или непрерывными параметрами (когда группы некомпактны); феноменологически дискретные числа называются квантовыми числами. Наличие закона сохранения означает, что в процессе столкновения сумма квантовых чисел или непрерывных параметров остается постоянной; в случае дискретной группы не изменяется произведение квантовых чисел (например, четностей). Все эти утверждения хорошо известны из нерелятивистской квантовой механики. Но чрезвычайно важным результатом, вытекающим из всех

современных экспериментов, является то обстоятельство, что в данном пункте между физикой элементарных частиц и квантовой механикой не существует никаких фундаментальных различий. Элементарные частицы можно классифицировать с помощью квантовых чисел, значений масс и времен жизни так же, как это делается со стационарными состояниями в квантовой механике.

Различие появляется лишь при уточнении самих групп, лежащих в основе теории. Несомненно, что в физике элементарных частиц наиболее важной является группа Лоренца [6], которая заменяет группу Галилея нерелятивистской квантовой механики и приводит к законам сохранения энергии, импульса и момента. Законы сохранения барионного числа, лептонного числа и электромагнитного заряда нужно интерпретировать как следствие инвариантности относительно соответствующих калибровочных групп. Еще одна важная группа связана с «изоспином» частиц и с зарядовой симметрией [7]. Оказывается, что она изоморфна вращениям в трехмерном пространстве или группе  $SU_2$  (унимодулярным унитарным преобразованиям двух комплексных переменных) и приводит к существованию изоспиновых мультиплетов, которые более подробно будут обсуждаться ниже. Из анализа экспериментальных данных известно, что электромагнитный заряд является суммой изоспинового заряда и гиперзаряда [8] и что последний связан с понятием странности [9—11]. Этот факт наводит на мысль, что существует связь между изоспиновой группой и калибровочной группой странности; по-видимому, их следует объединить в группу  $U_2$  (унитарные преобразования двух комплексных переменных), которая является как раз прямым произведением  $SU_2$  на калибровочное преобразование. Наконец, эксперименты показывают, что существуют определенные дискретные группы: пространственное отражение  $P$  [12, 13], зарядовое сопряжение  $C$ , обращение времени  $T$  и  $G$ -сопряжение (произведение  $C$  и обращения изоспина<sup>1)</sup>) [14, 15].

<sup>1)</sup> Под обращением понимается поворот в пространстве изоспина на  $180^\circ$  вокруг второй оси. — *Прим. ред.*



Наличие указанных групп дает нам чрезвычайно важную информацию о структуре исходного закона природы; однако то обстоятельство, что некоторые из симметрий справедливы лишь приближенно, вызывает некоторое сомнение. Действительно, само существование мультиплетов в спектре элементарных частиц указывает на присутствие более слабых взаимодействий, которые являются менее симметричными. Ведь в случае полной симметрии любое  $n$ -мерное представление группы должно приводить к  $n$  одинаковым собственным значениям массы. Их расщепление может быть обусловлено только менее симметричными взаимодействиями. Например, в квантовой механике хорошо известно, что внешнее электрическое поле нарушает исходную вращательную симметрию системы и приводит к расщеплению оптических линий (эффект Штарка); таким образом, симметрию можно понизить внешним воздействием. С другой стороны, мультиплетная структура оптических спектров обусловлена тем, что независимость вращательной симметрии отдельно по спиновому и по орбитальному движениям разрушается введением магнитного спин-орбитального взаимодействия. В этом случае не существует никакого действия извне, нарушающего симметрию: если сначала пренебречь магнитными силами, то можно искусственным путем создать более высокую симметрию (независимость спина и орбиты) и лишь потом ее нарушить. Эти примеры показывают, что следует различать два вида симметрий или инвариантностей. Симметрии первого рода свойственны исходному закону природы (например, инвариантность относительно вращений в квантовой механике). Симметрии второго рода возникают вследствие тех приближений, которые более или менее оправдываются для различных состояний рассматриваемой системы. Так как симметрии первого рода могут нарушаться действием «извне», этот последний термин необходимо несколько уточнить. Во многих случаях физик-экспериментатор может изменять внешнее воздействие произвольным образом, помещая систему в электрическое или магнитное поле, заключая ее в ящик и т. д. В других ситуациях на систему может действовать мир в целом, так что это влияние физику не

подвластно. Так, в эйнштейновской теории гравитации центробежные силы возникают из-за внешнего действия основного состояния вселенной или из-за существования очень удаленных масс; их нельзя изменять произвольно.

Поскольку существование мультиплетов масс в спектре элементарных частиц не вызвано искусственными внешними полями, следует выбирать одну из двух возможных интерпретаций. Симметрии могут быть врожденными, т. е. относиться к первому типу; при этом их нарушает основное состояние «мира». Они могут принадлежать ко второму типу, т. е. быть приближенными по самой своей природе и возникать за счет применяемого приближения. Совершенно очевидно, что выбор между указанными возможностями чрезвычайно важен для формулировки теории.

Наряду с упоминавшимися до сих пор группами массовый спектр, по-видимому, содержит довольно широкие мультиплеты более высокого порядка, указывая тем самым на существование группы  $SU_3$  [16, 17], которая включает группы изоспина и странности в качестве подгрупп. Этому предположению соответствует существование двух<sup>1)</sup> бозонных октетов, а также одного октета и одного декуплета фермионов. Разности масс между различными компонентами мультиплетов велики (грубо говоря, в 100 раз больше, чем в случае изоспиновых мультиплетов), но тем не менее они достаточно хорошо укладываются в формулу, которая получается в рамках нарушенной  $SU_3$ -симметрии [18]. С помощью этой формулы в 1962 г. была предсказана масса  $\Omega^-$ -гиперона [19, 20]. Тут снова возникает вопрос, к какому типу (первому или второму) относится группа  $SU_3$ .

### § 3. Различные типы взаимодействий

Наличие приближенных симметрий в спектре масс и во взаимодействиях элементарных частиц указывает на то, что (в зависимости от того, какими из этих симметрий они обладают) все взаимодействия делятся на

<sup>1)</sup> В настоящее время наряду с 0- и 1-октетами, которые имеет в виду автор, заполнен также 2<sup>+</sup>-октет. — *Прим. ред.*

несколько различных типов. Исторически «сильные взаимодействия» определялись как ответственные за силы связи между нуклонами в атомных ядрах и за рассеяние пионов на нуклонах. Электромагнитные взаимодействия были известны уже в классической физике. «Слабые взаимодействия» наблюдались при радиоактивных распадах. На современном уровне знаний «сильные взаимодействия», по-видимому, более удобно определять как часть полного взаимодействия, строго симметричную относительно всех упоминавшихся групп, кроме  $SU_3$ . Электромагнитные взаимодействия по определению нарушают изоспиновую инвариантность и  $G$ -сопряженность, но симметричны относительно всех остальных групп. Слабые (радиоактивные) взаимодействия уничтожают сохранение странности и изозаряда<sup>1)</sup>,  $P$ ,  $C$  и  $G$ , но инвариантны относительно собственной группы Лоренца,  $PC$ - и  $PCT$ -преобразований и удовлетворяют сохранению барионного и лептонного числа и электрического заряда. Возможно, что имеются и другие слабые взаимодействия, еще менее симметричные. Так, недавние эксперименты<sup>2)</sup> указывают на существование небольшой примеси взаимодействий, нарушающих сохранение  $PC$ . Наконец, существует гравитация, которая играет очень важную роль в структуре мира на больших расстояниях; однако непосредственного влияния на свойства элементарных частиц она, по-видимому, не оказывает.

Возможно, что сильные взаимодействия снова можно разбить на две такие части, чтобы одна из них была симметрична относительно группы  $SU_3$ , а другая — нет. Правда, массовое расщепление, которое создает вторая часть взаимодействий, ненамного меньше того, что дает первая часть (в первом случае характерной энергией является  $1 \text{ Гэв}$ , а во втором  $0,2\text{—}0,4 \text{ Гэв}$ ). Вместе с тем оказывается, что массовые соотношения для  $SU_3$ -мультиплетов выполняются с гораздо более высокой точностью, чем этого можно было бы ожидать, глядя на упомянутые величины энергий.

1) То есть третьей компоненты изоспина. — *Прим. ред.*

2) Речь идет об открытии аномальных двухпионных распадов  $K_1^0$ -мезона. — *Прим. ред.*

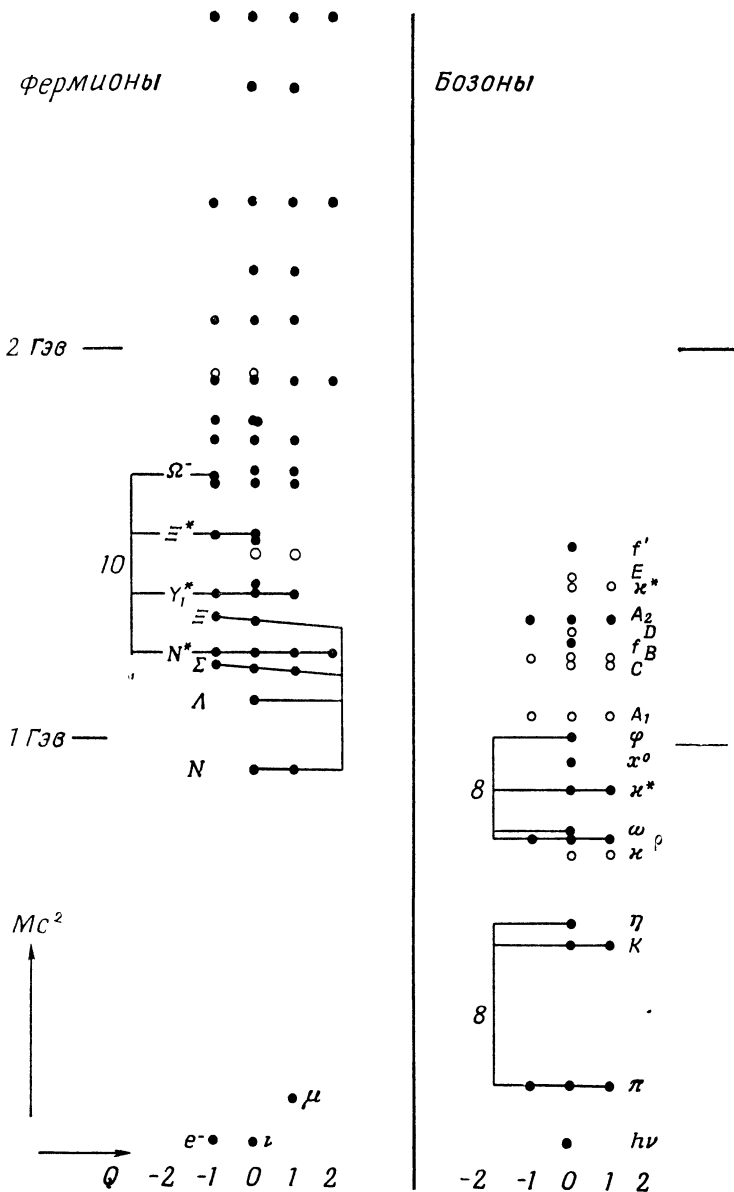
Электромагнитные силы, которые вызывают расщепление изоспиновых мультиплетов ( $U_2$ -мультиплетов), гораздо более слабы. Соответствующая разность масс по порядку равна  $1 \text{ Мэв}$ , т. е. приблизительно совпадает с электростатической энергией сферы, имеющей заряд электрона и радиус порядка  $10^{-13} \text{ см}$ . Факт нарушения изоспиновой симметрии непосредственно виден из того, что электромагнитные свойства протона и нейтрона совершенно различны; в то же время относительно сильных взаимодействий они представляют одну и ту же частицу, отличаясь лишь «направлением» ее изоспина.

Интенсивность слабых (радиоактивных) взаимодействий можно грубо оценить, сравнивая время жизни радиоактивного распада заряженных пионов (примерно  $10^{-8} \text{ сек}$ ) с временем жизни электромагнитного распада нейтральных пионов (примерно  $10^{-16} \text{ сек}$ ). Мы видим, что слабые взаимодействия примерно в  $10^8$  раз менее интенсивны, чем электромагнитные. Массовое расщепление, вызываемое ими, гораздо меньше современной точности измерений. Нарушение сохранения пространственной четности при слабых взаимодействиях можно сразу обнаружить по поляризации частиц, вылетающих при радиоактивном распаде.

Наконец, гравитационное взаимодействие электрона с протоном примерно в  $10^{39}$  раз слабее электростатической силы, действующей между этими частицами.

#### § 4. Спектр элементарных частиц

Мы обсудили симметрии или группы, существующие в физике элементарных частиц, а также рассмотрели различные типы взаимодействий и тем самым определили общие принципы, в рамках которых можно проанализировать запутанный спектр элементарных частиц. На фиг. 2 приведены наблюдаемые стационарные состояния, причем по оси абсцисс отложен их заряд, а по оси ординат — масса. Для каждого состояния существует соответствующее антисостояние той же массы и противоположного заряда (когда заряд равен нулю, в некоторых случаях они тождественны друг другу). Как правило, эти антисостояния на рисунок не нанесены.



Фиг. 2. Спектр масс элементарных частиц.

$Q$  — заряд. Состояния, отмеченные светлыми кружками, определены менее надежно.

«Элементарными частицами» считаются только состояния с барионными числами 1, 0,  $-1$  и лептонным числом 0 и, наоборот, с лептонными числами 1, 0,  $-1$  и барионным числом 0.

Прежде всего спектр можно разделить на бозонную и фермионную ветви, т. е. частицы, подчиняющиеся статистике Бозе или статистике Ферми. Из лоренцевой и  $PCT$  инвариантностей следует, что все частицы с полуцелым спином должны быть фермионами, а частицы с целым спином — бозонами. Бозоны обладают нулевым барионным и лептонным числами. Для частиц промежуточной массы (от 100 до 800 Мэв) часто используется термин «мезон». В большинстве случаев мезоны являются бозонами, но сюда же попадает и мюон ( $\mu$ -мезон), так что этот термин для классификации не совсем удобен.

Фермионы тоже можно разделить на два сильно отличающихся друг от друга класса — барионы и лептоны. Лептонная группа содержит лишь несколько различных частиц (электроны, мюоны и два вида нейтрино); основным свойством лептонов является то, что они не принимают участия в сильных взаимодействиях. Наиболее интенсивным для них является электромагнитное (в случае электронов или мюонов) или «слабое» (в случае нейтрино) взаимодействие. Остальные фермионы принадлежат к группе барионов; только среди них можно обнаружить изоспиновые и  $SU_3$ -мультиплеты. За структуру массового спектра ответственны также симметрии основного взаимодействия. На фиг. 2 низший  $SU_3$ -октет и декуплет частиц спина  $3/2$  соединены линиями. Большинство изоспиновых мультиплетов легко распознать по тому признаку, что частицы различных зарядов обладают примерно одинаковыми массами. Из приведенной схемы сразу видно, что во многих случаях электромагнитное взаимодействие можно рассматривать как малое возмущение; в то же время разница между  $SU_3$ -симметричными и  $SU_3$ -асимметричными взаимодействиями невелика.

Среди бозонов  $SU_3$ -октеты также соединены линиями; ширина изоспиновых и  $SU_3$ -мультиплетов здесь примерно такая же, как и у фермионов. Фотон занимает на схеме особое положение: так как он не участвует в силь-

ных взаимодействиях, то его место среди бозонов аналогично расположению лептонов в группе фермионов. Заряд фотона равен нулю, но изоспин этой частицы не имеет определенного значения.

## § 5. Взаимодействие и причинность

Взаимодействие между различными элементарными частицами экспериментально изучается при их столкновениях. С помощью процессов рассеяния и порождения новых частиц были выявлены законы сохранения, а тем самым и групповая структура основного принципа, лежащего в основе теории. Наряду с этой информацией, в основном эквивалентной тому, что мы получаем из анализа спектра масс, исследование процессов рассеяния затрагивает также проблему причинности. Термин «причинность» употребляется здесь в смысле специальной теории относительности: от точки к точке взаимодействие распространяется вдоль светового конуса (ближкодействие), так что хронологическая последовательность причины и следствия всегда строго определена. Хорошо известно, что в таком виде локальная причинность не противоречит статистическому характеру квантовой механики, и поэтому было бы очень важно знать, насколько следуют этой схеме реальные события природы.

Из экспериментов можно получить два существенных утверждения:

1. Однозначно локализовать события с точностью, превышающей  $0,5 \cdot 10^{-13}$  см, нельзя. Этот вывод следует из того, что в процессах рассеяния вплоть до энергий порядка  $10^5$  Гэв сравнительно большие поперечные импульсы оказываются распределенными по гауссовскому закону  $\exp(-p^2/p_0^2)$ , где  $p_0 \approx 400$  Мэв/с [21]. В силу принципа неопределенности величина  $p_0$  ограничивает точность измерения положения.

2. Несмотря на это, предсказания, выводимые из предположения о строгой локальной причинности в релятивистском смысле (дисперсионные соотношения и т. д.), еще ни разу не были опровергнуты. Правда, можно возразить, что из-за указанного ограничения эксперименты и не доказывают локальную причинность. Тем

не менее с математической точки зрения локальная причинность является весьма простой концепцией, и важно представлять, что она не вступает в противоречие ни с какими экспериментальными данными.

Поскольку до сих пор не исследовались процессы рассеяния лептонов при высоких энергиях, к экспериментальным результатам, упомянутым в пункте 1, следует относиться с осторожностью. Слова «высокая энергия» понимаются здесь в том смысле, что в системе центра масс кинетическая энергия сталкивающихся лептонов должна иметь порядок нескольких *Гэв*. В настоящее время нельзя исключить возможность того, что в подобных лептонных процессах распределение больших поперечных импульсов будет существенно отличаться от экспоненциального  $\exp(-p_{\perp}^2/p_0^2)$ ; полное отсутствие сильных взаимодействий может привести к совершенно новой ситуации. Ее характерные черты может указать математическая схема квантовой электродинамики. Однако существующие эксперименты оставляют эту проблему совершенно открытой.

Экспериментальные результаты по рассеянию при высоких энергиях (например, электронов на ядрах) можно интерпретировать также как информацию о распределении заряда или массы или, с более общей точки зрения, как информацию о структуре соответствующих частиц. Правда, эта интерпретация несколько проблематична, так как она предполагает справедливость обычного квантового механизма взаимодействия, который может не иметь места в окончательной релятивистской теории. Но все же для нуклонов, например, она дает разумную картину — разумную в тех пределах, в которых вообще существуют какие-либо хорошие модельные представления. В некотором смысле нуклон представляет рыхлое облако радиусом порядка  $10^{-13}$  см. Его плотность имеет максимум, причем в центре она, видимо, не очень сингулярна и резко спадает на расстояниях примерно  $10^{-13}$  см. Подобная картина должна быть справедливой для всех частиц, принимающих участие в сильных взаимодействиях. Однако для лептонов она может быть совершенно иной.



## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

## § 1. Математическое описание свободных частиц

В большинстве экспериментов элементарные частицы в начальной и конечной стадиях являются свободными, двигаясь в камере Вильсона, пузырьковой камере или эмульсии и при этом, возможно, взаимодействуя с внешним электрическим или магнитным полем. Поэтому математическое описание явлений естественно начать с рассмотрения свободных частиц. Для этой цели достаточны хорошо известные методы обычной линейной теории поля [22, 23]. Каждому виду элементарных частиц сопоставляется полевой оператор  $\psi_\alpha(x)$ , удовлетворяющий линейному дифференциальному уравнению

$$(\square + \kappa^2)\psi_\alpha(x) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\kappa$  — масса частицы,  $x$  — пространственно-временные координаты. Индекс  $\alpha$  используется для характеристики трансформационных свойств частицы по отношению к различным группам преобразований и тем самым для указания ее спина, изоспина и других квантовых чисел. Точно так же  $x$  можно рассматривать просто как непрерывный параметр, необходимый для определения трансформационных свойств относительно неоднородной части группы Лоренца, т. е. подгруппы трансляций. Математически состояния свободных частиц можно в известном смысле рассматривать как некоторые представления групп, лежащих в основе теории. Тогда состояние свободной частицы можно выразить, применяя к вакуумному состоянию полевой оператор  $\psi_\alpha(x)$ :

$$|\psi_f\rangle = \int d^4x f_\alpha(x) \psi_\alpha^*(x) |0\rangle. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) можно назвать «контравариантным представлением» состояния  $|\psi_f\rangle$  посредством функции  $f_\alpha(x)$ . Функция  $g_\alpha(x)$ , определяемая соотношением

$$g_\alpha(x) = \langle 0 | \psi_\alpha(x) | \psi_f \rangle, \quad (2.3)$$

может интерпретироваться как «ковариантное представление»  $|\psi_f\rangle$ . Как видно из (2.3), функция  $g_\alpha(x)$  удовлетворяет тому же волновому уравнению (2.1), что и  $\psi_\alpha(x)$ :

$$(\square + \kappa^2) g_\alpha(x) = 0.$$

Для функции  $f_\alpha(x)$  это, вообще говоря, несправедливо.

Важной математической величиной является так называемая двухточечная функция — вакуумное ожидание произведения свободного оператора поля и оператора, ему сопряженного:

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^*(y) | 0 \rangle = \int d^4 p e^{ip(x-y)} \frac{c_{\alpha\beta}(p)}{p^2 - \kappa^2}. \quad (2.4)$$

Здесь числитель дроби  $c_{\alpha\beta}(p)$  зависит от рассматриваемого представления. Правую часть равенства (2.4) удобно интегрировать по  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  вдоль вещественных осей, но в комплексной  $p_0$ -плоскости контур интегрирования надо выбирать в зависимости от упорядоченности сомножителей, стоящих в левой части. Для разных типов упорядоченности (например, для хронологического произведения, для коммутатора или антикоммутатора) необходимы различные контуры интегрирования. Подробности о соотношениях, при которых существенно наличие полюса в точке  $p^2 - \kappa^2 = 0$ , можно найти в книгах по квантовой теории поля. Соответствующие результаты кратко суммированы в приложении I.

Когда частицы движутся под действием внешнего электромагнитного поля, их поведение можно описать линейным волновым уравнением, которое отличается от (2.1) некоторыми дополнительными членами, зависящими от заряда, магнитного момента и других электромагнитных свойств частиц.

Таким образом, все множество различных полевых операторов для разных типов свободных частиц (и соответствующие им волновые уравнения) содержит боль-

шое количество важной информации о свойствах частиц. Они пригодны для характеристики ситуации в начале и конце эксперимента. Поэтому часто их называют *in* или *out* операторами или асимптотическими операторами.

С другой стороны, как математический аппарат при формулировке теории элементарных частиц эти операторы не очень полезны. Они являются вторичными величинами, выводимыми из асимптотического поведения других выражений, которые более фундаментальны и которые описывают внутренние механизмы мира элементарных частиц. Асимптотические операторы можно построить лишь после того, как найдено решение математических проблем физики элементарных частиц.

Начальное или конечное состояния являются по определению такими состояниями, в которых взаимодействием между частицами можно пренебречь. Действуя на вакуум полиномами из асимптотических операторов, можно построить такие и только такие состояния. Обычно предполагается, что они образуют полный набор; это значит, что любое взаимодействие в итоге, когда оно становится пренебрежимо малым, приводит систему к состоянию из этого же набора. Но даже если это так, сами состояния взаимодействия могут принадлежать к более широкой совокупности, которую нельзя представить только асимптотическими состояниями. Кроме того, идея о полноте набора асимптотических состояний сталкивается с трудностью: любое из них, как правило, содержит неизвестное число ненаблюдаемых инфракрасных световых квантов [24]. Поэтому истинное состояние является не «чистым» (в квантовомеханическом смысле), а скорее «смешанным». Однако эти трудности имеют более формальную природу, и мы не будем обсуждать их детально. Во многих случаях влияние инфракрасных квантов несущественно, и им можно просто пренебречь.

## § 2. S-матрица

S-матрица, или матрица рассеяния, связывает конечные состояния с начальными, пучок входящих частиц с пучком уходящих [25—27]. Поэтому она является

первым и чрезвычайно важным инструментом для описания взаимодействия (по крайней мере с феноменологической точки зрения). Математически  $S$ -матрица есть унитарная матрица, преобразующая начальные асимптотические состояния в конечные:

$$|in\rangle = S|out\rangle, \quad |out\rangle = S^{-1}|in\rangle. \quad (2.5)$$

В несколько иных обозначениях

$$S = |in\rangle\langle out|. \quad (2.6)$$

Унитарность  $S$ -матрицы существенна для ее физической интерпретации. Из условия

$$S^*S = SS^* = 1 \quad (2.7)$$

получаем для диагональных элементов

$$\sum_{out} |\langle out|in\rangle|^2 = \sum_{in} |\langle out|in\rangle|^2 = 1. \quad (2.8)$$

Это равенство дает возможность рассматривать величину  $|\langle out|in\rangle|^2$  как вероятность обнаружения состояния  $|out\rangle$  в эксперименте, который начался в состоянии  $|in\rangle$ , или, наоборот, как вероятность найти состояние  $|in\rangle$  в эксперименте, где конечное состояние является известным состоянием  $|out\rangle$ . Таким способом  $S$ -матрицу сразу же можно сравнить с наблюдениями, проведенными в данном опыте. На самом деле оказывается, что она содержит вообще все, что мы можем наблюдать.

Кроме постулата унитарности,  $S$ -матрица должна удовлетворять другим условиям, которые вытекают из фундаментальной групповой структуры принципа, лежащего в основе теории. Если этот принцип инвариантен относительно некоторой группы преобразований, то этим же свойством обязана обладать и  $S$ -матрица. Операторы, осуществляющие данное преобразование, представимы унитарными операторами, действующими в пространстве асимптотических состояний. Инвариантность  $S$ -матрицы для них можно сформулировать как

$$O_i^{-1}SO_i = S, \quad (2.9)$$

или

$$O_iS - SO_i = 0. \quad (2.10)$$

Таким образом, генераторы должны коммутировать с  $S$ -матрицей.

Если на начальные или конечные состояния влияют внешние поля, например электромагнитные, то инвариантность  $S$ -матрицы может нарушиться. Это происходит в тех случаях, когда такие поля сами не инвариантны относительно рассматриваемых преобразований или не принимают в них участия. Во втором случае инвариантность  $S$ -матрицы может быть экспериментально установлена, лишь если поля можно выбирать произвольно. Однако поля, создаваемые миром в целом или очень удаленными массами (подобно центробежным силам в общей теории относительности), произвольно менять, нельзя. В таком случае инвариантность  $S$ -матрицы практически нарушается, хотя «в принципе» она и имеет место, но эту инвариантность и соответствующий закон сохранения экспериментально проверить нельзя. Поэтому, как уже было указано в § 2 гл. 1, невозможно каким-либо простым способом провести различие между внутренним отсутствием симметрии у фундаментального закона природы и возмущением этой симметрии внешним полем, которое создается миром в целом или удаленными массами.

Инвариантность  $S$ -матрицы немедленно приводит к наличию соответствующих законов сохранения. Например, если начальное состояние принадлежит собственному значению  $O'_i$  оператора  $O_i$

$$O_i |in\rangle = O'_i |in\rangle, \quad (2.11)$$

то конечное состояние будет принадлежать тому же собственному значению  $O'_i$

$$\begin{aligned} O_i |out\rangle &= O_i S^{-1} |in\rangle = \\ &= O_i S^{-1} O_i^{-1} O_i |in\rangle = S^{-1} O'_i |in\rangle = O'_i |out\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поэтому величина  $O'_i$  в процессе взаимодействия «сохраняется». Это сохранение не имело бы места, если бы в начальном или конечном состоянии присутствовали внешние поля, не инвариантные относительно  $O_i$ . Можно сказать, что в этом случае некоторые из величин  $O'_i$

перераспределяются между внешним полем и элементарными частицами. Тогда закон сохранения формально восстанавливается, если в баланс включить величину, связанную с внешними полями и их источниками. Однако, когда поля создаются миром в целом или удаленными массами, этот закон практически проверить нельзя.

Кроме унитарности и инвариантности относительно фундаментальных групп,  $S$ -матрица должна каким-то образом содержать математическую формулировку причинности, т. е. соотношения между причиной и следствием, которое вытекает из специальной теории относительности (ср. § 5 гл. 1). Это необходимо потому, что  $S$ -матрица допускает полное построение уходящих состояний по приходящим. В последние годы проведено большое количество исследований, в результате которых возникло некоторое описание математического представления причинности на языке аналитического поведения  $S$ -матричных элементов [28—36]. Простейшим примером является упругое рассеяние двух взаимодействующих частиц. В этом случае аналитическое поведение матричных элементов, которое соответствует локальной причинности, проанализировано весьма основательно. Оно приводит к различного рода «дисперсионным соотношениям». Последние оказываются очень ценным инструментом для теоретического анализа экспериментальных данных. Однако в более сложных случаях, подобных рождению в процессе столкновения новых частиц, об аналитических свойствах  $S$ -матричных элементов, представляющих причинность, известно очень мало. Самые предварительные сведения можно, по-видимому, получить, если рассматривать проблемы такого типа в рамках локальной теории поля в первых порядках теории возмущений. Однако вопрос о справедливости этого результата в рамках точной теории остается открытым. Кроме того, не исключена возможность, что реальное взаимодействие имеет некоторые признаки нелокальности (полностью локальная теория поля, учитывающая взаимодействие, возможно, содержит некоторые математические противоречия). Видимо, на данном уровне знаний, относящихся к квантовой теории

поля, окончательного решения проблемы причинности дать нельзя.

Для асимптотических операторов и для  $S$ -матрицы из релятивистского постулата причинности вытекает еще одно интересное следствие. Если взаимодействие от данной точки способно передаваться только к соседней точке, то можно ожидать, что в асимптотических операторах будут играть роль лишь такие решения уравнения (2.1), которые для очень малых временных промежутков сосредоточены в очень малой пространственной области. Фурье-преобразование таких решений (типа швингеровских  $\Delta$ -функций) содержит положительные и отрицательные частоты. Поэтому асимптотические операторы обычно интерпретируются как операторы и рождения, и уничтожения: они рожают античастицы и уничтожают частицы, в то время как сопряженные операторы рожают частицы и уничтожают античастицы.  $S$ -матричные элементы формально можно построить из некоторого числа in и out операторов

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \langle 0 | \psi_{\text{out}}^{(1)} \psi_{\text{out}}^{(2)} \dots \psi_{\text{in}}^{*(1)} \psi_{\text{in}}^{*(2)} \dots | 0 \rangle. \quad (2.13)$$

При замене одного из асимптотических операторов рождения на оператор уничтожения или наоборот возникает новый  $S$ -матричный элемент, отличный от (2.13). Он содержит то же общее число асимптотических операторов, т. е. относится к такому же количеству входящих и уходящих частиц. Если эти два матричных элемента рассматривать как аналитические функции координат, от которых зависят асимптотические операторы, то в случае строгой локальной причинности они должны быть связаны процедурой аналитического продолжения. Это соотношение обычно называется «кросс-симметрией»<sup>1)</sup> [37, 38]. Оказывается, что оно хорошо согласуется с существующими наблюдениями. Его математический анализ становится возможным лишь после того, как сформулирована схема вычисления  $S$ -матричных элементов на основе некоторого более общего теоретического базиса. Заметим, что соотношение (2.13)

<sup>1)</sup> Употребляются также термины «кросс-симметрия» и «перекрестная симметрия». — *Прим. ред.*

является именно формальным определением, а не основой для теоретических вычислений.

Так постулат причинности находит адекватное математическое представление в аналитическом поведении  $S$ -матричных элементов, если рассматривать их как функции координат входящих и уходящих частиц. Вместе с тем теория функций многих комплексных переменных очень сложна. Поэтому весьма вероятно, что получить таким путем какие-то общие математические утверждения о поведении  $S$ -матричных элементов, зависящих от многих переменных, будет очень трудно.

Возможно, что трех основных свойств  $S$ -матрицы (унитарности, инвариантности относительно фундаментальных групп и аналитического представления причинности) в принципе достаточно для полного определения ее структуры. Тем не менее из-за математической сложности  $S$ -матрицы она едва ли может служить хорошей основой для формулировки фундаментального принципа физики элементарных частиц. Описание (пусть неполное) явлений посредством  $S$ -матрицы несомненно возможно. Но она должна быть результатом, а не исходным пунктом теории; ее нужно получать с помощью математических операций, отправляющихся от аксиом, формулируемых более простым способом. Именно эту роль играет  $S$ -матрица в нерелятивистской квантовой механике. А так как квантовая механика является некоторой частью физики элементарных частиц, то следует ожидать, что роль  $S$ -матрицы и в этой более общей области по существу будет та же.

### § 3. Полевые операторы

Следующим математическим инструментом, который может оказаться полезным при описании мира элементарных частиц, является локальный полевой оператор  $\chi(x)$ . В пользу его применимости можно привести два следующих основных аргумента. Во-первых, Йордан, Клейн и Вигнер [39] показали, что основное уравнение нерелятивистской квантовой механики можно сформулировать на языке полевых операторов. Кроме того, успехи, достигнутые в физике элементарных частиц с



помощью постулата локальной причинности (дисперсионные соотношения и кроссинг-симметрия), также наводят на мысль о существовании некоторых фундаментальных полевых операторов и соответствующего дифференциального уравнения («уравнения поля»), которое, возможно, удастся положить в основу математического аппарата теории.

По своей природе эти фундаментальные полевые операторы резко отличаются от асимптотических полевых операторов свободных частиц, обсуждавшихся в предыдущем параграфе. Они не связаны с каким-то одним определенным типом частиц, а могут интерпретироваться как операторы рождения и уничтожения материи вообще (а не только ее определенных стационарных состояний).

Если фундаментальные полевые операторы  $\chi_\alpha(x)$  реализуют простое нетривиальное представление групп симметрии, лежащих в основе теории, то, построив выражения вида

$$O_\lambda(x) = \int \chi_\alpha(x) \chi_\beta(x + \xi_1) \chi_\gamma^*(x + \xi_2) \dots \dots \int f_{\alpha\beta\gamma \dots \lambda}(\xi_1, \xi_2 \dots) d\xi_1 d\xi_2 \dots, \quad (2.14)$$

можно сконструировать множество других, более общих представлений тех же групп. Полученные операторы снова будем интерпретировать как операторы рождения и уничтожения материи. Их связь с «асимптотическими» операторами (операторами свободных частиц) установим следующим образом. Фурье-образы двухточечных функций, построенных из величин  $O_\lambda(x)$ , при определенных значениях масс могут содержать полюса

$$\langle 0 | O_\lambda(x) O_\mu^*(y) | 0 \rangle = \int d^4 p e^{ip(x-y)} \left( \frac{c_{\lambda\mu}(p)}{p^2 - m^2} + \dots \right). \quad (2.15)$$

Тогда возможно определение такого асимптотического оператора  $\psi_\lambda(x)$ , в двухточечной функции которого возникает тот же полюсной член, что и в случае  $O_\lambda(x)$ , причем в ней не появляется других полюсов и разрезов. При этих условиях можно говорить, что оператор  $O_\lambda(x)$  «содержит» оператор свободной частицы  $\psi_\lambda(x)$ , т. е. что  $O_\lambda(x)$  рождает или уничтожает частицы массы  $m$ ,

которые по своим квантовым числам характеризуются его трансформационными свойствами. В этом смысле  $O_\lambda(x)$  будет содержать, вообще говоря, несколько операторов свободных частиц: наряду с определенными полюсными членами его двухточечная функция может обладать и разрезами, которые соответствуют непрерывному спектру, относящемуся к этой симметрии. Знание аналитических свойств двухточечной функции (2.15) означало бы уже, что нам полностью известны все частицы с соответствующими свойствами симметрии. Для данной симметрии можно построить множество различных операторов  $O_\lambda(x)$ , содержащих разное число  $\chi(x)$  и  $\chi^*(x)$ ; несмотря на это, полюса (но не вычеты), которые возникают в их двухточечных функциях (поскольку они относятся к определенной симметрии), будут одними и теми же. Различные операторы  $O_\lambda(x)$  с одинаковой симметрией, по-видимому, связаны некоторым фундаментальным полевым уравнением. Оно определяет взаимодействие, а его трансформационные свойства фиксируют симметрии исходного закона природы.

Если таким путем действительно можно приспособить фундаментальные операторы для математического описания явлений, то постулат локальной причинности должен найти отражение в том простом предположении, что коммутатор (в случае спинорного поля антикоммутатор) для пространственно-подобных расстояний равен нулю. Пусть справедлива также следующая аксиома: для построения полного гильбертова пространства из основного состояния  $|0\rangle$  достаточно задать полевые операторы в сколь угодно малом (но конечном) промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  [40]. Тогда сделанного предположения, по-видимому, будет достаточно для формулировки локальной причинности. Мы не будем вдаваться в математические детали этих гипотез, так как аксиоматический анализ теории подобного рода еще не проведен; мы не будем также подробно детализировать свойства того гильбертова пространства состояний, в котором действуют операторы  $\chi_\alpha(x)$ . В конечном итоге структура и метрика гильбертова пространства должны определяться требованием самосогласованности всей математической схемы. Гильбертово пространство обя-

зано содержать асимптотические состояния, которые строятся из основного состояния с помощью асимптотических операторов; поэтому существуют такие физические состояния, которые можно интерпретировать непосредственно в терминах наблюдаемых. Однако оно может содержать также и другие состояния [41, 42], которые играют вспомогательную роль и необходимы (по крайней мере полезны) для упрощения формулировки теории.

Пусть справедлив постулат локальной причинности, и пусть операторы, заданных в интервале времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ , достаточно для построения полного гильбертова пространства. Тогда операторы в произвольный момент времени должны быть связаны с операторами из указанного промежутка с помощью математической процедуры, совместной с предположением коммутативности (или антикоммутативности) при пространственно-подобных интервалах. Такую процедуру можно наиболее просто сформулировать с помощью дифференциального уравнения для полевых операторов. Если имеет место локальная причинность, то дифференциальное уравнение должно быть инвариантно относительно преобразований Лоренца, а потому относится к гиперболическому типу; следовательно, оно будет совместно с коммутативностью наблюдаемых при пространственно-подобных расстояниях. Однако введение дифференциального уравнения для полевых операторов поднимает такие проблемы, которые не возникают в классической теории поля.

Это уравнение должно описывать взаимодействие и поэтому не может быть линейным. Так как взаимодействие предполагается локальным, соответствующий ему член уравнения должен содержать произведение полевых операторов, взятых в одной пространственно-временной точке. Но, как правило, такое произведение корректно не определено. Во всяком случае несомненно, что оно было бы не определено, если бы полевые операторы подчинялись каноническим перестановочным соотношениям. Вполне вероятно, что коммутатор (или антикоммутатор) в окрестности начала координат сингулярен. Проблема этой сингулярности неразрывно

связана с выяснением вопроса, каков истинный смысл члена взаимодействия [41, 42]. Так как свойства двухточечной функции и коммутатора должны быть совместны с дифференциальным уравнением, то в действительности сингулярность коммутатора в значительной степени будет определяться членом взаимодействия.

Следовательно, любая попытка сформулировать квантовую теорию поля с взаимодействием при помощи дифференциального уравнения требует тщательного изучения сингулярности двухточечной функции вблизи начала координат.

Дифференциальное уравнение для полевых операторов приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений относительно бесконечного набора матричных элементов произведений этих операторов. Чтобы из решений этих уравнений построить гильбертово пространство, к ним нужно добавить граничные условия. В обычной квантовой механике по существу имеются два типа границ: бесконечные пространственно-подобные расстояния и очень малые расстояния в точках сингулярности. Поведение волновых функций на этих границах определяется требованием конечности нормы соответствующих состояний. В релятивистской квантовой теории поля может существовать и граница третьего типа [43]. Взаимодействие, описываемое дифференциальным уравнением, разрешает рождение пар. В этом случае в бесконечном наборе матричных элементов, связанных дифференциальными уравнениями, имеются величины со сколь угодно большим числом аргументов, поэтому третья граница соответствует бесконечному числу переменных. Условие конечности нормы прежде всего требует, чтобы в этом случае она была определена. Оно приводит к сложным математическим проблемам, которые будут обсуждаться далее лишь в связи с полевой теорией, излагаемой в этой книге.

#### § 4. Связь между полевыми операторами и $S$ -матрицей

Как было указано выше, с помощью общей процедуры (2.14) из полевого оператора  $\chi(x)$  можно построить множество различных операторов  $O_\lambda(x)$ , обладаю-

щих одинаковой симметрией. Таким же путем можно получить и различные операторы, принадлежащие к разным симметриям. Если какой-либо из операторов одинаковой симметрии приводит к существованию полюса в соответствующей двухточечной функции, то, как правило, такой же полюс появится и в двухточечной функции любого другого оператора из этого набора. В действительности наличие в выражении (2.15) полюса доказывает существование дискретного стационарного состояния  $|\psi\rangle$  массы  $\kappa$ , свойства симметрии которого определяет  $O_\lambda(x)$ . Для этого состояния матричный элемент

$$\varphi_\lambda(x) = \langle 0 | O_\lambda(x) | \psi \rangle \quad (2.16)$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$(\square + \kappa^2)\varphi_\lambda(x) = 0. \quad (2.17)$$

С точностью до постоянного множителя величину  $\varphi_\lambda(x)$  можно отождествить с волновой функцией  $g_\lambda(x)$ , которая определяется соотношением (2.3) и соответствует состоянию  $|\psi\rangle$  «свободной частицы». Точно так же любые другие операторы  $O_\lambda(x)$ , обладающие одинаковой симметрией, приводят к сходным матричным элементам, которые, как правило, не равны нулю и отличаются от  $g_\lambda(x)$  лишь постоянным множителем. Именно это мы и имели в виду, когда говорили, что операторы  $O_\lambda(x)$  «содержат поле свободных частиц»  $\psi_\lambda(x)$ .

Вакуумное среднее

$$\langle 0 | T O_{\lambda_1}^{(1)}(x_1) O_{\lambda_2}^{(2)}(x_2) \dots O_{\lambda_n}^{(n)}(x_n) | 0 \rangle, \quad (2.18)$$

где операторы  $O_{\lambda_i}^{(i)}(x_i)$  могут относиться как к различным, так и к одинаковым симметриям, тесно связано с  $S$ -матричным элементом (символ  $T$  означает хронологически упорядоченное произведение в обычном смысле этого слова, когда операторы расположены в порядке убывания временных аргументов). Если в вакуумном среднем (2.18) некоторые временные аргументы стремятся к очень большим положительным значениям ( $t_1, t_2, \dots, t_s \rightarrow +\infty$ ), а остальные — к очень большим отрицательным величинам ( $t_{s+1}, t_{s+2}, \dots, t_n \rightarrow -\infty$ ), то его

можно интерпретировать как  $S$ -матричный элемент  $\langle \text{out} | \text{in} \rangle$  (2.6). Операторы  $O^{(s+1)}, O^{(s+2)}, \dots, O^{(n)}$  рождают при  $t \rightarrow -\infty$  входящие частицы, а операторы  $O^{(1)}, O^{(2)}, \dots, O^{(s)}$  уничтожают при  $t \rightarrow +\infty$  уходящие частицы. Следовательно, это асимптотическое значение вакуумного среднего (2.18) определяет  $S$ -матричный элемент.

В импульсном пространстве выражение (2.18) принимает такую общую форму:

$$\delta(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \frac{f(p_1, p_2, \dots, p_n)}{(p_1^2 - \kappa_1^2)(p_2^2 - \kappa_2^2) \dots (p_n^2 - \kappa_n^2)}. \quad (2.19)$$

Для асимптотического значения величины (2.18) в обычном пространстве ( $t \rightarrow \pm\infty$ ) важна лишь бесконечно малая окрестность полюсов, содержащихся в (2.19). Это утверждение справедливо независимо от того, устремляем ли мы в каком-нибудь из операторов  $t \rightarrow -\infty$  или  $t \rightarrow +\infty$ . Если в данном операторе перейти от предела  $t \rightarrow -\infty$  к  $t \rightarrow +\infty$ , то тем самым мы перейдем от исходного  $S$ -матричного элемента к новому, который соответствует тому же числу частиц. Эти два  $S$ -матричных элемента связаны аналитическим продолжением в вакуумном среднем (2.18). Такая связь является непосредственным выражением «кроссинг-симметрии» [37, 38].

## § 5. Аксиоматическая формулировка

$S$ -матричное описание мира элементарных частиц (§ 2) представляется весьма широкой схемой. Предварительный математический анализ показывает, что, если бы к ней не добавлялись очень специальные предположения об аналитическом представлении причинности, эта схема была бы непротиворечивой. Концепция локального полевого оператора (§ 3) является гораздо более проблематичной. Условие (анти)коммутативности при пространственно-подобных расстояниях и предположение о существовании дифференциального уравнения для полевого оператора накладывают на математическую схему жесткие ограничения. Если бы они могли выполняться, то дифференциальное уравнение приводило бы к простой формулировке некоего фундаменталь-

ного принципа, лежащего в основе физики элементарных частиц. Но даже такой ограниченный подход значительно шире аксиоматической схемы, которая часто обсуждалась в связи с квантовой электродинамикой и строилась в тесной аналогии с аксиоматикой обычной нерелятивистской квантовой механики.

Эта довольно узкая схема, которая (см. [44—50]) подробно изучалась Вайтманом и Леманом, Симанчиком, Циммерманом [51], накладывает на математическую схему два дополнительных (по сравнению с § 3) ограничения. Предполагается, что метрика полного гильбертова пространства, в котором действуют полевые операторы, должна быть положительно определена и что для его построения достаточно асимптотических полевых операторов. Второе условие и является решающим ограничением. Совместно с унитарностью  $S$ -матрицы оно уже приводит к дефинитности метрики всех тех подпространств полного гильбертова пространства, которые отделены от остальной части правилами суперотбора. Дефинитность метрики резко ограничивает возможные особенности двухточечных функций в окрестности начала координат и светового конуса; они должны быть по крайней мере типа  $\delta$ -функций. Если взаимодействие не допускает сингулярности этого вида, то сформулированные условия выполняться не могут. До сих пор невозможно привести какой-либо пример теории с локальным взаимодействием, которая бы полностью соответствовала этой узкой аксиоматической схеме.

Этот результат является несколько странным, так как, если потребовать унитарность  $S$ -матрицы, постулат положительности метрики гильбертова пространства не кажется очень жестким ограничением. Не очевиден тот факт, что добавление нефизических состояний к (асимптотическому) гильбертову пространству упростит как определение локальных полевых операторов, так и построение нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает их изменение во времени (в качестве особого примера подобной ситуации упомянем вариант квантовой электродинамики Гупта — Блейлера [52, 53]). Поэтому важно отметить, что с теоретико-групповой точки зрения унитарность  $S$ -матрицы является очень

естественным постулатом в отличие от предположения о дефинитности метрики. В этом можно убедиться следующим образом.

Группа всех преобразований, представления которой действуют в полном гильбертовом пространстве, необходимо является некомпактной; это следует из того, что в качестве подгруппы в нее должна входить группа Лоренца, которая некомпактна. В то же время конечное представление некомпактной группы можно построить лишь в пространстве с индефинитной метрикой. Правда, существуют представления некомпактной группы в бесконечномерном пространстве с дефинитной метрикой. Но конечные представления, которые могли бы относиться к подпространству полного бесконечного гильбертова пространства, являются более простыми и более естественными, а они требуют индефинитной метрики. С другой стороны,  $S$ -матрица связана с точно определенными значениями энергии и импульса, т. е. задается «на энергетической оболочке». Если полная энергия и импульс заданы, то группа оставшихся преобразований является компактной. Представления компактной группы могут действовать в пространстве с положительно определенной метрикой и с конечным числом измерений. Поэтому для  $S$ -матрицы требование унитарности естественно.

С точки зрения физической интерпретации необходима только унитарность  $S$ -матрицы. Этого достаточно для того, чтобы  $S$ -матричные элементы допускали обычное вероятностное понимание. Но соответствующая интерпретация локальных событий в пространственных областях с размерами  $10^{-13}$  см не требуется; можно усомниться, существует ли она вообще. Поэтому сведение полного гильбертова пространства к пространству асимптотических состояний и постулат дефинитности метрики не представляются обязательными ограничениями; они скорее усложняют, а не упрощают математическую структуру теории взаимодействующих полей.

Если попытаться сформулировать полевою теорию в более широких рамках, изложенных в § 3, то понятие «асимптотических состояний» может стать проблематичным. Даже в пределе при  $t \rightarrow \pm \infty$  могут оставаться



состояния, которые нельзя построить из собственных векторов энергии и импульса. Тем не менее должна существовать  $S$ -матрица, которая связывает все входящие состояния с уходящими. Путем их дополнительного преобразования  $S$ -матрицу можно привести к диагональному виду. Среди диагональных элементов, соответствующих собственным состояниям энергии и импульса, некоторые будут иметь вид  $e^{i\alpha}$  ( $\alpha$  — действительное число), а другие — не будут. Физическими следует называть лишь те состояния, которые принадлежат к первой совокупности. В полном гильбертовом пространстве они образуют подпространство, из которого состояние нельзя вывести никаким взаимодействием. В этом подпространстве можно дать обычное определение вероятности, заимствованное из квантовой механики.

## § 6. Гильбертово пространство с индефинитной метрикой

Квантовая теория поля общего типа (§ 3), по-видимому, требует, чтобы гильбертово пространство обладало индефинитной метрикой. В этом случае математический формализм несколько отличается от обычного аппарата, который относится к пространствам с дефинитной метрикой и описан в учебниках. Поэтому мы кратко изложим основные понятия, отвечающие гильбертову пространству с индефинитной метрикой [54—58].

Если гильбертово пространство построено с помощью некоторого числа фундаментальных векторов состояния  $|\Phi_n\rangle$ , то его произвольный вектор состояния  $|\psi\rangle$  можно задать двумя наборами компонент.

Один из них записывается в виде

$$|\psi\rangle = |\Phi_l\rangle \psi^l, \quad (2.20)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам. Величины  $\psi^l$  называются контравариантными компонентами вектора  $|\psi\rangle$ .

Можно также положить

$$\psi_l = \langle \Phi_l | \psi \rangle. \quad (2.21)$$

Величины  $\psi_l$  являются ковариантными компонентами вектора  $|\psi\rangle$ .

Метрика определяется соотношением

$$g_{ik} = \langle \Phi_i | \Phi_k \rangle. \quad (2.22)$$

В связи с (2.22) мы требуем, чтобы

$$g_{ik} = g_{ki}^*, \quad (2.23)$$

а из (2.20)—(2.22) следует, что

$$\psi_l = g_{lk} \psi^k. \quad (2.24)$$

Из  $|\Phi_l\rangle$ , вообще говоря, можно построить «обратную» систему векторов состояния  $|\Phi^l\rangle$ , которые определяются соотношением

$$\langle \Phi^k | \Phi_l \rangle = \delta_l^k. \quad (2.25)$$

Как видно из (2.20) и (2.25),

$$\psi^l = \langle \Phi^l | \psi \rangle. \quad (2.26)$$

Норму вектора  $|\psi\rangle$  можно вычислить по его компонентам:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \psi_l^* \psi^l = \psi^{*l} \psi_l = \psi^{*l} \psi^k g_{lk} = \psi_l^* \psi_k g^{lk}. \quad (2.27)$$

Матричные элементы оператора  $A$  можно ввести следующим образом:

$$\langle \Phi_l | A | \Phi_k \rangle = {}_l A_k, \quad \langle \Phi_l | A | \Phi^k \rangle = {}_l A^k \text{ и т. д.}$$

Тогда перемножение матриц производится согласно правилу

$${}_k (AB)_l = {}_k A_m {}^m B_l = {}_k A^m {}_m B_l = {}_k A_m g^{mn} {}_n B_l.$$

Самосопряженный оператор определяется соотношением

$$\langle \Phi_k | A | \Phi_l \rangle = \langle \Phi_l | A | \Phi_k \rangle^* \quad \text{или} \quad {}_k A_l = {}_l A_k^*.$$

Для этого свойства в индефинитной метрике можно применить также термин «псевдоэрмитов». В этом смысле оператор  $B^*$ , псевдоэрмитово сопряженный или просто сопряженный оператору  $B$ , определяется равенством

$$\langle \Phi_k | B^* | \Phi_l \rangle = \langle \Phi_l | B | \Phi_k \rangle^*,$$

или

$${}_k B_l^* = ({}_l B_k)^*. \quad (2.28)$$

Математическое ожидание оператора  $B$  в состоянии  $|\psi\rangle$  запишется как

$$\bar{B} = \frac{\langle \psi | B | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (2.29)$$

Для самосопряженного оператора оно действительно.

Наблюдаемые величины обычно представляются самосопряженными операторами. Их собственные значения не обязательно действительны. Таким образом, пусть  $|\psi\rangle$  — собственное состояние самосопряженного оператора  $O$ , а  $O'$  — соответствующее собственное значение:

$$O|\psi\rangle = O'|\psi\rangle. \quad (2.30)$$

Умножая это равенство слева на  $\langle \psi |$ , получаем

$$\langle \psi | O | \psi \rangle = O' \langle \psi | \psi \rangle. \quad (2.31)$$

Согласно (2.28), левая часть действительна. Если норма  $\langle \psi | \psi \rangle$  отлична от нуля, то  $O'$  должно быть действительным, и оно совпадает с величиной ожидания (2.29) оператора  $O$  в состоянии  $|\psi\rangle$ . Если  $O'$  является чисто мнимым или комплексным, то норма  $\langle \psi | \psi \rangle$  обязательно должна исчезать. Так как физические состояния всегда имеют положительную норму, то собственные значения и математические ожидания самосопряженных операторов, которые представляют наблюдаемые, в этих состояниях всегда действительны. Комплексные собственные значения таких операторов могут принадлежать только «призрачным» состояниям нулевой нормы.

Если  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$  — два различных собственных состояния оператора  $O$ , принадлежащих двум собственным значениям  $O'_1$  и  $O'_2$ , то из

$$O|\psi_1\rangle = O'_1|\psi_1\rangle \quad \text{и} \quad O|\psi_2\rangle = O'_2|\psi_2\rangle, \quad (2.32)$$

и

$$\langle \psi_2 | O = O_2'^* \langle \psi_2 |, \quad (2.33)$$

мы заключаем, что

$$\langle \psi_2 | O | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle O'_1 = O_2'^* \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle, \quad (2.34)$$

или

$$(O'_1 - O_2'^*) \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = 0.$$

Поэтому, если только не выполняется равенство  $O'_1 = O'_2$ , два состояния должны быть ортогональными друг другу. Два физических собственных состояния с различными действительными собственными значениями  $O'_1$  и  $O'_2$  с необходимостью взаимно ортогональны.

Как правило, собственных состояний оператора  $O$  недостаточно для построения полного гильбертова пространства.

Приведенные соотношения, которые справедливы для гильбертова пространства с индефинитной метрикой, заменяют соответствующие соотношения, известные из обычной квантовой механики. Их достаточно для понимания применений гильбертова пространства с индефинитной метрикой в последующих главах.

# ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ПОЛЕВОЕ УРАВНЕНИЕ

## § 1. Математическая форма полевого уравнения

При попытке сформулировать единую полевою теорию элементарных частиц руководящими принципами, обсуждавшимися в гл. 1, будут эмпирическая групповая структура (т. е. законы сохранения) и релятивистская причинность. Тот экспериментальный факт, что некоторые группы справедливы лишь приближенно (ср. § 2 гл. 1), заставляет нас проводить различие между *фундаментальными* группами, которые характеризуют исходный закон природы, и *приближенными* симметриями, возникающими из динамики системы. Нелинейная спинорная теория, излагаемая в этой книге, рассматривает группу Лоренца и группу изоспина  $U_2$  как фундаментальные, а группа  $SU_3$  и более высокие считаются приближенными динамическими симметриями<sup>1)</sup>. Аргументы в пользу такого выбора обсуждаются в § 2 и 5 этой главы.

Оказывается, что если исходить из этих предположений, то существует лишь одно простое уравнение, которое способно, вероятно, описать наблюдаемые элементарные частицы; оно и будет положено в основу рассуждений этой книги [59]:

$$i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^{\nu}} + l^2 \sigma^{\nu} : \chi(x) (\chi^*(x) \sigma_{\nu} \chi(x)) : = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $l$  — произвольная константа размерности длины (при обычном условии, что двухточечная функция  $\langle 0 | \chi(x) \chi^*(y) | 0 \rangle$  имеет размерность длины в степени  $-3$ ). Константу  $l$  можно принять просто за единицу длины.

<sup>1)</sup> В работах [132—134] обсуждались другие фундаментальные предположения.

Полевой оператор  $\chi(x)$  определяется как двухкомпонентный (вейлевский) спинор относительно преобразований Лоренца и как двухкомпонентный спинор в изопространстве. Если первый индекс у  $\chi(x) = \chi_{\alpha\beta}(x)$  относится к лоренцеву пространству, а второй — к изотопическому, то (3.1) имеет следующий явный вид:

$$i\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \frac{\partial \chi_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^{\nu}} + l^2 \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} : \chi_{\beta\gamma}(x) \chi_{\delta\epsilon}^*(x) \sigma_{\nu, \delta\eta} \chi_{\eta\epsilon}(x) : = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $\sigma^{\nu} = (1, \boldsymbol{\sigma})$  — обычные матрицы Паули.

Символ  $:$  : во втором члене относится к определению произведения трех полевых операторов в одной пространственно-временной точке. Оно понимается здесь как «виковское произведение» и определяется с помощью следующей процедуры:

$$\begin{aligned} : \chi(x) \chi^*(x) \chi(x) : &= \lim_{\delta \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0} [\chi(x) \chi^*(x + \delta) \chi(x + \epsilon + \delta) - \\ &- \langle 0 | \chi(x) \chi^*(x + \delta) | 0 \rangle \chi(x + \epsilon + \delta) - \\ &- \chi(x) \langle 0 | \chi^*(x + \delta) \chi(x + \epsilon + \delta) | 0 \rangle] \quad (3.3) \end{aligned}$$

[ $\epsilon$  и  $\delta$  — пространственно-подобные векторы, поэтому величину  $\langle 0 | \chi(x) \chi^*(x + \delta) | 0 \rangle$  можно заменить и на  $\langle 0 | T \chi(x) \chi^*(x + \delta) | 0 \rangle$ ]. Определение (3.3) требует, чтобы для матричных элементов любого произведения операторов из правой части существовал предел при  $\delta \rightarrow 0$  и  $\epsilon \rightarrow 0$ . Тем самым предполагается, что на сингулярности произведения типа  $\chi(x) \chi^*(x + \delta)$  в окрестности значения  $\delta \rightarrow 0$  наложены некоторые ограничения; они подробно обсуждаются в § 3.

Уравнение (3.1) можно записать в нескольких различных формах. Например, его можно заменить таким:

$$+ i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\nu}} + l^2 \tau_k \sigma^{\nu} : \chi (\chi^* \sigma_{\nu} \tau_k \chi) : = 0, \quad (3.4)$$

или

$$i\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \frac{\partial \chi_{\beta\gamma}}{\partial x^{\nu}} + l^2 \tau_k^{\eta\eta} \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} : \chi_{\beta\eta} \chi_{\delta\epsilon}^* \sigma_{\nu, \delta\zeta} \tau_k^{\epsilon\zeta} \chi_{\zeta\epsilon} : = 0 \quad (3.5)$$

[ $\tau_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) — матрицы Паули в изоспиновом пространстве].

Благодаря антикоммутиационным соотношениям для  $\chi(x)$ , которые будут обсуждаться ниже (§ 3), эти уравнения эквивалентны (3.1) и (3.2).

Другая возможность заключается во введении дираковского (четырёхкомпонентного) спинора  $\psi_\alpha(x)$  с левым уравнением

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} + l^2 \gamma_\nu \gamma_5 : \psi (\bar{\psi} \gamma^\nu \gamma_5 \psi) : = 0. \quad (3.6)$$

Оно эквивалентно (3.1), если (в обычном представлении для матриц  $\sigma_\nu$  и  $\gamma_\nu$ ; ср. стр. 225) положить

$$\psi_1 = \chi_{11}, \quad \psi_2 = \chi_{21}, \quad \psi_3^* = \chi_{22}, \quad \psi_4^* = -\chi_{12}. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) явилось первым нелинейным спинорным уравнением, которое было признано в качестве возможного базиса теории элементарных частиц. Однако с теоретико-групповой точки зрения эта форма не совсем удобна, так как изоспиновые преобразования будут представляться здесь необычным путем.

Вполне естественно, что математическую структуру теории столь общего типа можно выразить многими различными способами. Так, например, основные принципы квантовой химии, могут быть сведены к уравнению Шредингера для многоэлектронной системы, или к квантовой полевой теории волн материи (в том виде, как она была развита Клейном, Йорданом и Вигнером [39]), или к гамильтониану матричной механики и т. д. Математический формализм квантовой теории чрезвычайно гибок и допускает большое число различных, но эквивалентных представлений. Не вызывает сомнения, что это справедливо и для структуры, описываемой уравнениями (3.1), (3.4) или (3.6); однако ниже в основном будет применяться простейшая форма (3.1):

$$i\sigma^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} + l^2 \sigma^\nu : \chi (\chi^* \sigma_\nu \chi) : = 0.$$

## § 2. Групповая структура фундаментального уравнения

Уравнение (3.1) инвариантно относительно целого ряда линейных преобразований. Полный анализ этих симметрий устанавливает как квантовые числа с помо-

щью которых можно классифицировать возникающие в теории элементарные частицы и стационарные состояния, так и законы сохранения, справедливые для этих характеристик. В связи с этим необходимо напомнить, что если взять фундаментальное уравнение само по себе, то его симметрии еще недостаточно для симметрии теории в целом. Симметрия всей теории и законы сохранения возникают без каких-либо ограничений лишь в том случае, когда свойствами симметрии уравнения обладают перестановочные соотношения и основное состояние (симметрии коммутатора и основного состояния будут рассмотрены в § 3 и 5). При сравнении результатов теоретико-группового анализа с эмпирическими фактами, касающимися мультиплетов и законов сохранения, мы впервые начинаем осознавать возможности уравнения (3.1) как основы теории элементарных частиц.

Среди непрерывных групп этого уравнения наиболее важной, несомненно, является собственная группа Лоренца<sup>1)</sup>. Ее неоднородная часть представлена в (3.1) преобразованиями трансляции

$$x_\nu \rightarrow x_\nu + a_\nu, \quad \chi(x) \rightarrow \chi(x + a) \quad (3.8)$$

с четырьмя непрерывными параметрами  $a^\nu$ . Инвариантность уравнения (3.1) относительно этих преобразований приводит к сохранению энергии и импульса.

Представление однородной группы лоренцевых преобразований

$$\chi_{\nu\lambda}(x) \rightarrow \exp \left[ -\frac{i}{2} (\alpha_k + i\beta_k) \sigma_{k, \nu\delta} \right] \chi_{\delta\lambda}(x') \quad (3.9)$$

содержит шесть действительных непрерывных параметров  $\alpha_k, \beta_k$  ( $x'$  означает координаты после выполнения преобразования Лоренца, определяемого этими параметрами). В случае бесконечно малых  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  величины  $\alpha_k$  можно отождествить просто с углами поворотов вокруг  $k$ -х осей, а величины  $\beta_k$  — со скоростями в  $k$ -направлениях. Инвариантность уравнения (3.1) относи-

<sup>1)</sup> Как видно из дальнейшего, автор имеет в виду неоднородную группу Лоренца, которая в настоящее время обычно называется группой Пуанкаре. — *Прим. ред.*



тельно преобразования (3.9) приводит к сохранению момента и к трем интегралам, относящимся к движению центра масс.

Следующей важной непрерывной группой является группа изоспина, которая изоморфна группе  $SU_2$  или группе вращений в трехмерном пространстве. Уравнение (3.1) инвариантно относительно преобразований

$$\chi_{\alpha\lambda}(x) \rightarrow \exp\left(\frac{i}{2} \eta_k \tau_{k\lambda\mu}\right) \chi_{\alpha\mu}(x) \quad (3.10)$$

с тремя действительными непрерывными параметрами  $\eta_k$ . Поэтому должны сохраняться три компонента полного изоспина. Эксперименты показывают, что изоспин сохраняется только приближенно; этот закон сохранения нарушается электромагнитными взаимодействиями. В рамках теории, опирающейся на уравнение (3.1), этот факт можно объяснить в предположении, что основное состояние не является полностью симметричным, так что основное состояние следует называть не вакуумом, а «миром». Электромагнитные силы приводят к перераспределению изоспина между элементарными частицами и «миром». Такая асимметрия основного состояния более подробно будет обсуждаться в § 5 этой главы и в гл. 7.

Кроме того, уравнение (3.1) инвариантно относительно масштабного преобразования (растяжения)

$$\chi(x) \rightarrow \eta^{1/2} \chi(x\eta). \quad (3.11)$$

Эта важная однопараметрическая группа может играть роль в связи с частицами нулевой массы покоя (ср., например, работу [113]). Существование частиц конечной массы покоя нарушает масштабную инвариантность (если в преобразовании не участвуют массы) и может рассматриваться как результат асимметрии основного состояния относительно группы растяжений. Вероятно, что эту асимметрию можно приписать даже коммутатору. Недавнее развитие теории в направлении построения квантовой электродинамики указывает на существование связи между сохранением лептонного числа и масштабным преобразованием. Однако решение этого вопроса можно будет обосновать лишь после построения полной теории лептонов.

Наконец, (3.1) инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$\chi(x) \rightarrow e^{ia\alpha} \chi(x). \quad (3.12)$$

Эту инвариантность можно использовать для объяснения сохранения барионного числа; тем самым заканчивается перечисление непрерывных групп уравнения (3.1). Полная группа характеризуется пятнадцатью непрерывными параметрами.

Если сравнить полученные результаты с эмпирическими симметриями, мультиплетами и законами сохранения (временно игнорируя дискретные группы), то окажется, что бóльшую их часть можно объяснить с помощью уравнения (3.1). Правда, на данной стадии анализа может возникнуть некоторое сомнение, связанное с тем, способны ли *три* группы калибровочных (или подобных им) преобразований [(3.10) при  $\eta_h = (0, 0, \eta_3)$ , (3.11) и (3.12)] объяснить существование *четырёх* квантовых чисел: заряда, гиперзаряда, барионного числа и лептонного числа. Но в связи с теорией странных частиц на этот вопрос будет найден удовлетворительный ответ (гл. 7). Там будет установлено, что возможность приписать основному состоянию «мира» изоспиновые свойства приводит к расщеплению калибровочной группы (3.12) на две: одна из них относится к лоренцеву пространству, а другая — к изотопическому. Единственной наблюдаемой симметрией, которая не входит явно в уравнение (3.1) в качестве фундаментального свойства, является группа  $SU_3$ . Это хорошо согласуется с тем эмпирическим фактом (ср. § 2 гл. 1), что отклонения от  $SU_3$  очень велики — примерно в 100 раз больше, чем отклонения от изоспиновой группы  $SU_2$ . Но в некоторых частях спектра элементарных частиц группа  $SU_3$  еще справедлива, и это требует объяснения. В дальнейшем развитии теории она возникнет как некоторая приближенная симметрия, обязанная своим происхождением вырождению основного состояния (см. § 1 гл. 7) и соответствующим ему динамическим следствиям уравнения (3.1).

Как хорошо известно, дискретные группы релятивистского волнового уравнения связаны с группой

Лоренца. Обычно предполагается существование трех дискретных операций<sup>1)</sup>):

- $C$  — замена частиц на античастицы,
- $P$  — пространственная инверсия,
- $T$  — обращение времени.

Если изоспин является хорошим квантовым числом, то операцию  $C$  нужно заменить операцией  $G$ ; от  $C$  она отличается поворотом  $J$  на  $\pi$  в изоспиновом пространстве:

$$G = CJ. \quad (3.13)$$

В то время как  $G$ ,  $C$  и  $P$  являются линейными операциями, обращение времени  $T$  антилинейно.

Уравнение (3.1) инвариантно относительно собственной группы Лоренца. Поэтому в соответствии с теоремой Людерса [61] и Паули [62] оно инвариантно также относительно  $PCT = PGJT$ .

Кроме того, уравнение инвариантно относительно  $PG$ ,  $PC$  или  $T$ . Преобразование  $PG$  имеет вид

$$\chi(\mathbf{r}, t) \rightarrow R\chi^*(-\mathbf{r}, t), \quad (3.14)$$

где  $R$  — матрица (действующая и в спиновом, и в изоспиновом пространствах), которая определяется соотношениями

$$\sigma_k = -R\sigma_k^T R^{-1}, \quad \tau_k = -R\tau_k^T R^{-1} \quad (3.15)$$

( $\sigma_k^T$  и  $\tau_k^T$  — транспонированные матрицы  $\sigma_k$  и  $\tau_k$ ). В обычном представлении, когда

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

можно положить

$$R = \sigma_2 \tau_2. \quad (3.16)$$

Однако уравнение (3.1) не инвариантно относительно каждой отдельной операции  $P$ ,  $G$  или  $C$ . Это связано с тем, что двухкомпонентный (вейлевский) спинор  $\chi(x)$

<sup>1)</sup> Дискретные преобразования автор обычно называет операциями. — Прим. ред.

соответствует собственной группе Лоренца и не может преобразовываться по представлению полной группы Лоренца, которая включает пространственное отражение. Если в производных уравнения (3.1) обратить пространственные координаты, то получится новое уравнение, которому может удовлетворять новый оператор  $\tilde{\chi}(x)$ :

$$i\bar{\sigma}^{\nu} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial x^{\nu}} + l^2 \bar{\sigma}^{\nu} \tilde{\chi} (\tilde{\chi}^* \bar{\sigma}_{\nu} \tilde{\chi}) = 0, \quad (3.17)$$

где  $\bar{\sigma}^{\nu} = (1, -\sigma)$ . По своим трансформационным свойствам относительно собственной группы Лоренца  $\tilde{\chi}$  отличается от  $\chi$ . Он преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\chi}_{\alpha\lambda} \rightarrow \exp \left[ -\left(\frac{i}{2}\right) (\alpha_k - i\beta_k) \sigma_{k,\alpha\beta} \right] \tilde{\chi}_{\beta\lambda}. \quad (3.18)$$

Заметим, что спинор  $\sigma^{\nu} \chi (\chi^* \sigma_{\nu} \chi)$  преобразуется так же, как и  $\tilde{\chi}$ .

Если бы основное состояние и коммутатор обладали полной симметрией уравнения (3.1), то операция четности не принадлежала бы уравнению; из-за масштабной инвариантности все собственные значения масс были бы равны нулю и все частицы имели бы определенную спиральность. Однако если основное состояние нарушает масштабную инвариантность и если существуют дискретные собственные значения, соответствующие конечным массам, то возникает другая ситуация. В этом случае уравнение Клейна — Гордона для фермиона

$$(\square + \kappa^2) \langle 0 | \chi(x) | N \rangle = 0 \quad (3.19)$$

(как было указано Дюрром в [60]) автоматически приводит к удвоению числа компонент. Тогда (3.19) можно заменить двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} i\sigma_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \langle 0 | \chi(x) | N \rangle &= \kappa \langle 0 | \tilde{\chi}(x) | N \rangle, \\ i\bar{\sigma}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \langle 0 | \tilde{\chi}(x) | N \rangle &= \kappa \langle 0 | \chi(x) | N \rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Входящий в матричные элементы оператор  $\tilde{\chi}(x)$  формально имеет те же трансформационные свойства, что и оператор  $\chi(x)$  в уравнении (3.17); кроме того, можно принять, что спектры масс уравнений (3.17) и (3.1) со-

впадают. Поэтому два оператора  $\hat{\chi}(x)$  можно отождествить. Тогда при соответствующих предположениях относительно свойств основного состояния (ср. § 5) удается ввести операцию четности.

Формально два спинора  $\chi$  и  $\tilde{\chi}$  можно объединить в один четырехкомпонентный спинор

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

а два уравнения (3.1) и (3.17) записать в виде одного уравнения для  $\psi$

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} l^2 [\gamma_\mu \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)] = 0, \quad (3.22)$$

где  $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$ , а  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака.

Тогда операция четности записывается в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \gamma_4 \psi(-\mathbf{r}, t) \quad (3.23)$$

и (3.22) инвариантно относительно этого преобразования. Окончательный вывод заключается в том, что если бы основное состояние и коммутатор имели полную симметрию уравнения (3.1), то в такой теории операция четности не существовала бы. Однако если масштабная инвариантность нарушается свойствами основного состояния или коммутатора и если для фермионов существуют конечные собственные значения масс, то в качестве дополнения к нарушению масштабного преобразования можно ввести и операцию четности. Если в этом случае коммутатор и основное состояние будут строго инвариантны относительно пространственного отражения, то этим же свойством будет обладать и вся теория.

### § 3. Двухточечная функция Грина и антикоммутатор

Если [как в уравнении (3.1)] определен локальный полевой оператор  $\chi(x)$ , то постулату релятивистской причинности можно удовлетворить наиболее естественным образом, предполагая

$$\{\chi(x) \chi^*(y)\} = 0 \text{ для пространственно-подобного } (x - y). \quad (3.24)$$

Это условие накладывает известные ограничения на аналитическое поведение двухточечных функций Грина; они изучались в аксиоматической теории поля. Следуя ее построениям, предположим, что спектральное представление для двухточечной функции можно получить способом Челлена и Лемана [63—66]. Из интуитивных соображений мы считаем, что оператор  $\chi(x)$  уничтожает (рождает) фермионы (антифермионы) с множеством различных масс  $\kappa$ ; поэтому можно ожидать, что двухточечная функция представима в виде интеграла по всему массовому спектру:

$$\begin{aligned}
 F(x, x') &= \langle 0 | T \chi_{\alpha\lambda}(x) \chi_{\beta\mu}^*(x') | 0 \rangle = \\
 &= i (2\pi)^{-4} \int \rho(\kappa^2) d(\kappa^2) \int d^4 p \frac{p_\nu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\nu}{-p^2 + \kappa^2} \delta_{\lambda\mu} e^{-ip(x-x')}. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Для дискретных собственных значений спектральная функция  $\rho(\kappa^2)$  содержит  $\delta$ -функции, а для непрерывного спектра — непрерывные функции. Интегрирование по  $p_1, p_2, p_3$  нужно проводить вдоль действительных осей, а интегрирование по  $p_0$  — вдоль контура комплексной плоскости, который выбирается в зависимости от порядка сомножителей в левой части так, как это описано в учебниках и в приложении I; тогда условие (3.24) выполняется.

При выводе (3.25) предполагается, что двухточечная функция инвариантна относительно собственной группы Лоренца, изоспиновой группы и преобразований (3.12) и (3.14). Если, кроме того, представление (3.25) должно быть инвариантным относительно масштабного преобразования (3.11), то оно сводится к

$$\begin{aligned}
 F(x, x') &= \langle 0 | T \chi_{\alpha\lambda}(x) \chi_{\beta\mu}^*(x') | 0 \rangle = \\
 &= \text{const} \cdot l^{-2} \int \frac{d^4 p}{(p^2)^2} p_\nu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\nu e^{-ip(x-x')} \delta_{\lambda\mu}. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

В этом случае двухточечная функция была бы полностью инвариантна относительно всех групп симметрии уравнения (3.1). Но более подробный анализ показывает, что решение такого вида невозможно, так как представление (3.26) несовместимо с членом взаимодей-

ствия уравнения (3.1). В этом можно убедиться следующим образом.

Уравнение (3.1) требует, чтобы существовал оператор  $\sigma^v : \chi(x) (\chi^*(x) \sigma_v \chi(x)) :$  и содержащие его матричные элементы. Наиболее сильные сингулярности в виковском произведении устраняются операцией (3.3). Однако, используя проинтегрированную форму уравнения (3.1), один из полевых операторов [например,  $\chi(x)$ ] можно заменить выражением

$$\chi(x) = \chi_0(x) - l^2 \int d^4x' G(xx') \sigma^v : \chi(x') (\chi^*(x') \sigma_v \chi(x')) :. \quad (3.27)$$

Здесь  $\chi_0(x)$  удовлетворяет уравнению Вейля  $i\sigma^v (\partial\chi/\partial x^v) = 0$ , а  $G(xx')$  — функция Грина этого уравнения

$$G(xx') = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{p_v \sigma^v}{p^2} e^{-ip(x-x')}. \quad (3.28)$$

Тогда рассматриваемый оператор превращается в

$$\begin{aligned} \sigma^v : \chi(x) (\chi^*(x) \sigma_v \chi(x)) : &= -l^2 \int d^4x' \sigma^v G(xx') \sigma^v : \times \\ \times : \chi(x') (\chi^*(x') \sigma_\mu \chi(x')) : \times : (\chi^*(x) \sigma_v \chi(x)) : &+ \\ &+ \sigma^v : \chi_0(x) (\chi^*(x) \sigma_v \chi(x)) :. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В качестве наиболее сингулярной части первый член содержит выражения типа

$$\int d^4x' G(xx') F(xx') F(x'x), \quad (3.30)$$

которые не устраняются с помощью виковской процедуры. Поэтому условие их существования ограничивает сингулярность функции  $F(xx')$  в точке  $x=x'$ . Аналогично оператор, подобный

$$\sigma^v : \chi(x) (\chi^*(x) \sigma_v \chi(x)) : \sigma^\mu : \chi(x') (\chi^*(x') \sigma_\mu \chi(x')) : , \quad (3.31)$$

в качестве наиболее сингулярной части содержит члены вида

$$F(xx') F(x'x) F(xx'). \quad (3.32)$$

Так как должен существовать интеграл этого произведения по  $x$  и  $x'$ , то сингулярность  $F(xx')$  снова ограничена.

Выражение (3.26) для функции  $F(xx')$ , которое основано на ее масштабной инвариантности, будет содержать члены типа  $(x - x') \sqrt{\sigma^2} \delta[(x - x')^2]$ ; они приводят к тому, что интегралы (3.30) и (3.32) не имеют смысла. Следовательно, предположение (3.26) о масштабной инвариантности  $F(xx')$  несовместимо с членом взаимодействия уравнения (3.1).

Этот результат можно понимать в том смысле, что взаимодействие без массы невозможно, или, более точно, при наличии взаимодействия должно существовать хотя бы несколько фермионов конечной массы. То, что взаимодействие и масса тесно связаны, не удивительно. Однако кажется странным, что фундаментальное уравнение, обладающее определенной симметрией, не допускает существования симметричного коммутатора или симметричного основного состояния и поэтому не приводит к соответствующему закону сохранения. Вместе с тем в классической физике или нерелятивистской квантовой механике легко найти пример подобной ситуации. Если (3.1) интерпретировать как классическое волновое уравнение, которое получается из лагранжиана, то последний не инвариантен относительно преобразования (3.11). Поэтому соответствующего закона сохранения не будет даже в классической теории. Пример из квантовой механики: уравнение движения ангармонического осциллятора  $\ddot{q} = -\alpha q^3$  инвариантно относительно преобразования  $q(t) \rightarrow \eta q(t\eta)$ ; но ни классический лагранжиан, ни квантовый коммутатор не инвариантны; поэтому здесь нет соответствующего закона сохранения.

Несмотря на общность этой ситуации, масштабное преобразование (3.11) будет играть важную роль в связи с теорией частиц нулевой массы покоя, особенно фотонов. Такие частицы не исключаются наличием взаимодействия; на самом деле, согласно теореме Голдстоуна (которая будет рассмотрена в гл. 7 и 8), они являются необходимым следствием вырожденности основного состояния.

Следует подчеркнуть, что в случае масштабного преобразования симметрия нарушается не только основным состоянием, но и коммутатором. Раз коммутатор в не-



посредственной окрестности светового конуса не может содержать члены  $(x - x')_{\nu} \overline{\sigma^{\nu}} \delta[(x - x')^2]$ , то он не будет и симметричным. Поэтому в гильбертовом пространстве не существует такого унитарного или псевдоунитарного преобразования, которое соответствовало бы операции (3.11).

В связи с этим возникает общий вопрос, в какой степени коммутатор и двухточечная функция определяются фундаментальным волновым уравнением. При теперешнем состоянии математического анализа ответ на него дать нельзя. Аналогия с нерелятивистской квантовой механикой подсказывает, что двухточечную функцию (которая отражает свойства основного состояния) произвольно выбирать нельзя, но ее нельзя и однозначно определить; например, одно и то же вещество может образовывать различные динамически (хотя и не термодинамически) стабильные кристаллы. Поэтому проблема основного состояния в излагаемой теории играет такую же роль, как и проблема множественности космологических моделей в космологии. Вопрос реализуемости конкретного типа основного состояния решается лишь доказательством последовательности его выбора. Можно высказать множество различных предположений относительно свойств основного состояния, которые все приводят к непротиворечивым решениям.

Вернемся к возможной масштабной инвариантности основного состояния. В этом случае можно поставить вопрос, существуют ли решения для коммутатора, «приблизительно» масштабно инвариантные, хотя бы в непосредственной окрестности светового конуса. Анализ условий, связывающих волновое уравнение (3.1) с двухточечной функцией, привел Миттера [68] к заключению, что в окрестности светового конуса она может иметь следующий вид:

$$F(x, x') \sim \frac{(x - x')_{\nu} \overline{\sigma^{\nu}}}{l^2 (x - x')^2} f_{\text{пер}} \left[ \ln \frac{(x - x')^2}{x_0^2} \right]. \quad (3.33)$$

Здесь  $f_{\text{пер}}$  — периодическая (возможно, эллиптическая), функция, среднее значение которой равно нулю. Такое

поведение совместимо с существованием выражений (3.30) и (3.32), т. е. со взаимодействием. В то же время оно инвариантно относительно преобразования (3.11) при некоторых дискретных значениях параметра  $\eta$ , а именно при тех, которые изменяют аргумент функции  $f_{\text{пер}}$  на величину, кратную периоду ( $\eta = \eta_0^n$ , где  $n$  — целое). Если вблизи светового конуса не только вакуумное среднее коммутатора, но и сам он будет вести себя соответственно двухточечной функции (3.33), то дискретное преобразование (3.11) определяет реальную симметрию и тогда в гильбертовом пространстве можно найти псевдоунитарное преобразование, которое для определенных значений  $\eta = \eta_0^n$  имеет вид

$$U\chi(x)U^{-1} = \eta^{1/2}\chi(\eta x). \quad (3.34)$$

Мы пока не будем развивать эту возможность; она может играть важную роль в связи с теорией столкновений при очень высоких энергиях (ср. § 5 гл. 9).

Условия существования выражений (3.30) и (3.32) независимо от проблемы масштабной инвариантности накладывают ограничения на возможный массовый спектр  $\rho(\kappa^2)$ , входящий в (3.25): двухточечная функция в окрестности светового конуса не должна содержать членов типа  $\delta$ -функции и ее производных. С другой стороны, обычная швингеровская функция, соответствующая массе  $\kappa$ , как раз имеет члены, пропорциональные  $\delta'[(x - x')^2]$  и  $\kappa^2\delta[(x - x')^2]$ . В представлении (3.25) они могут исчезать лишь при условии [69, 70]

$$\int \rho(\kappa^2) d(\kappa^2) = 0, \quad (3.35)$$

$$\int \rho(\kappa^2) \kappa^2 d(\kappa^2) = 0. \quad (3.36)$$

Чтобы удовлетворить этим условиям,  $\rho(\kappa^2)$  должна принимать как положительные, так и отрицательные значения, а это означает индефинитность метрики гильбертова пространства. Если условия (3.35) и (3.36) выполне-

ны, то выражение (3.25) можно переписать в следующей регуляризованной форме:

$$\begin{aligned}
 F(x x') &= i(2\pi)^{-4} \int \rho(\kappa^2) d(\kappa^2) \int d^4 p \times \\
 &\times \left( \frac{1}{-p^2 + \kappa^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{\kappa^2}{(p^2)^2} \right) p_\nu \bar{\sigma}^\nu e^{-i p(x-x')} = \\
 &= i(2\pi)^{-4} \int \rho(\kappa^2) d(\kappa^2) \int d^4 p \frac{p_\nu \bar{\sigma}^\nu \kappa^4}{(p^2)^2 (-p^2 + \kappa^2)} e^{-i p(x-x')}. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

В этом выражении вклад каждого значения массы формально регуляризуется полюсом и диполем нулевой массы. Поэтому, если используется форма (3.37) и интеграл по  $\kappa^2$  сходится, условия (3.35) и (3.36) можно отбросить. В действительности если  $\rho(\kappa^2)$ , входящая в (3.37), не удовлетворяет условиям (3.35) и (3.36), то, не изменяя (3.37), вместо нее можно поставить функцию

$$\bar{\rho}(\kappa^2) = \rho(\kappa^2) - \delta(\kappa^2) \int \rho(\kappa^2) d(\kappa^2) + \delta'(\kappa^2) \int \rho(\kappa^2) \kappa^2 d(\kappa^2),$$

которая уже будет им удовлетворять. В этом случае двойной полюс при нулевой массе оказывается физически существенным.

Специальную форму (3.33) для двухточечной функции вблизи светового конуса можно получить из (3.37), если при больших значениях  $\kappa^2$  выбрать массовый спектр в виде

$$\rho(\kappa^2) \xrightarrow{\kappa^2 \rightarrow \infty} \frac{\text{const}}{l^2 \kappa^4} g_{\text{пер}} \left( \ln \frac{\kappa^2}{\kappa_0^2} \right), \quad (3.38)$$

где среднее значение периодической функции  $g_{\text{пер}}$  снова должно обращаться в нуль. При теперешнем состоянии теории гипотеза (3.38) является лишь интересной возможностью асимптотического поведения  $\rho(\kappa^2)$ , но определенного утверждения относительно этого поведения сейчас сделать нельзя.

Пока теория в целом не завершена, точное определение функции  $\rho(\kappa^2)$ , входящей в (3.25) и (3.37), невозможно. Поэтому временно приходится довольствоваться приближенными выражениями, которые могут представлять ее удовлетворительно в лучшем случае лишь в определенной области значений  $\kappa^2$ .

Достаточность такого представления для других расчетов зависит от специфики соответствующей задачи. Простейшим приближением этого типа является предположение, что в (3.37) входит единственная фермионная масса

$$F(\kappa\kappa') \approx i(2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{p_\nu \bar{\sigma}_\nu \kappa^4}{(p^2)^2 (-p^2 + \kappa^2)} e^{-ip(x-x')}. \quad (3.39)$$

Предварительно массу  $\kappa$ , вероятно, можно отождествить с массой нуклона или со средней массой низшего барионного октета [конечно, если фундаментальное уравнение (3.1) приводит к фермионным решениям такого типа]. На самом деле в этом случае двухточечная функция будет содержать и двойной полюс при нулевой массе; следствия, к которым это приводит, обсуждаются в § 4. В окрестности светового конуса поведение функции  $F(\kappa'\kappa)$ , определяемой соотношением (3.39), менее сингулярно, чем функции (3.33). Приближенная двухточечная функция (3.39) не совместима с масштабной инвариантностью (3.34) и с соответствующими свойствами коммутатора. Тем не менее для исследования многих проблем, в которых процессы при очень высоких энергиях играют лишь незначительную роль, она является вполне достаточным приближением.

Если масштабная инвариантность нарушается основным состоянием, то можно ввести операцию четности с помощью формул (3.20) — (3.23). В этом случае двухточечная функция, соответствующая уравнению (3.22), может быть записана в виде

$$\langle 0 | \Psi_{\alpha\lambda}(x) \bar{\Psi}_{\beta\mu}(x') | 0 \rangle = (2\pi)^{-4} \int d(\kappa^2) \delta_{\lambda\mu} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \times \\ \times \frac{\rho_1(\kappa^2)(-p_\nu \gamma_{\alpha\beta}^\nu + i\kappa) + \rho_2(\kappa^2)(-p_\nu \gamma_{\alpha\beta}^\nu - i\kappa)}{-p^2 + \kappa^2}. \quad (3.40)$$

Условия (3.35) и (3.36) обобщаются тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} \int [\rho_1(\kappa^2) + \rho_2(\kappa^2)] d(\kappa^2) &= 0, \\ \int [\rho_1(\kappa^2) + \rho_2(\kappa^2)] \kappa^2 d(\kappa^2) &= 0, \\ \int [\rho_1(\kappa^2) - \rho_2(\kappa^2)] \kappa d(\kappa^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Если соотношения (3.41) выполняются, то их можно отбросить, а (3.40) переписать в регуляризованной форме

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_{\alpha\lambda}(x) \bar{\psi}_{\beta\mu}(x') | 0 \rangle &= (2\pi)^{-4} \int d(\kappa^2) \delta_{\lambda\mu} \int d^4 p e^{-ip(x-x')} \times \\ &\times \left\{ [\rho_1(\kappa^2) + \rho_2(\kappa^2)] \frac{p_\nu \gamma_{\alpha\beta}^\nu \kappa^4}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2)} + \right. \\ &\left. + [\rho_1(\kappa^2) - \rho_2(\kappa^2)] \frac{i\kappa^3}{p^2 (p^2 - \kappa^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Двухточечные функции (3.40) и (3.42) инвариантны относительно пространственного отражения.

В связи с этим следует подчеркнуть, что преобразование  $\psi(x) \rightarrow \gamma_5 \psi(x)$  [или более общее  $\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5) \psi(x)$ ] не относится к четырехкомпонентному варианту (3.22) фундаментального уравнения, поскольку система (3.20) не допускает независимых калибровочных преобразований спиноров  $\chi(x)$  и  $\tilde{\chi}(x)$ . Поэтому два массовых спектра  $\rho_1(\kappa^2)$  и  $\rho_2(\kappa^2)$  не обязаны совпадать.

В соотношениях (3.25) — (3.42) предполагалось, что двухточечная функция инвариантна относительно изоспиновой группы. Однако в реальном мире изоспиновая симметрия справедлива лишь приближенно. Поэтому он может описываться фундаментальным уравнением (3.1) лишь в том случае, когда основное состояние относительно изоспинового преобразования симметрично не полностью. Следовательно, соотношения (3.25) — (3.42) можно рассматривать лишь как полезное приближение; в окончательной теории двухточечная функция должна содержать малые члены, не инвариантные относительно вращений в изоспиновом пространстве. Влияние этих членов сказывается в электромагнитных взаимодействиях, которые будут обсуждаться в гл. 8.

Вообще нет никаких причин, по которым основное состояние мира обязано быть симметричным по отношению

к любому из преобразований, оставляющих фундаментальное уравнение (3.1) инвариантным. Наоборот, мир, по-видимому, полностью асимметричен. Но эта асимметрия должна сказываться на свойствах элементарных частиц лишь в том случае, когда их полной изоляции от остального мира препятствуют силы далекого действия. Поэтому степень асимметрии двухточечных функций служит мерой нарушения независимости между частицами и миром.

Двухточечная функция представляет вакуумное среднее (анти)коммутатора; но для самого (анти)коммутатора общих утверждений типа тех, которые используются в квантовой механике, сделать нельзя. Условие причинности (3.24) утверждает, что при пространственно-подобных расстояниях  $x - x'$  величина  $\{\chi(x), \chi^*(x')\}$  должна обращаться в нуль; но во всех других случаях выражение  $\{\chi(x), \chi^*(x')\}$  будет оператором ( $q$ -числом, а не  $c$ -числом). В этом отношении  $\{\chi(x), \chi^*(x')\}$  следует сравнивать с выражением типа  $[q(t)q(t')]$  из обычной квантовой механики, которое (кроме особого случая гармонического осциллятора) является  $q$ -числом. Однако в пределе при  $|t - t'| \rightarrow 0$  квантовомеханическая величина  $[q(t)q(t')]$  стремится к  $c$ -числу. Аналогично можно допустить, что при  $|(x - x')^2| \rightarrow 0$  выражение  $\{\chi(x), \chi^*(x')\}$  стремится к  $c$ -числу. Так как в этом пределе оно, видимо, сингулярно, то свойство  $c$ -численности означает, что для всех диагональных членов оператора наиболее сильные сингулярности совпадают и что недиагональные члены являются менее сингулярными. В этом случае квантовая теория поля (с учетом взаимодействия) приближалась бы к обычной квантовой механике в наибольшей степени, которую можно представить. Действительно ли математическая схема следует этому пути, пока неизвестно.

#### § 4. Призрачные и дипольные состояния в двухточечной функции

Если приближенное выражение (3.39) для двухточечной функции интерпретировать физически, то оно указывает на существование фермионов массы  $\kappa$  (возможно,

нуклонов или вообще барионов) и сингулярности при нулевой массе, которую нельзя называть просто «частицей», так как при этой массе (3.39) содержит двойной полюс. Такая сингулярность оказывает характерное влияние на  $S$ -матрицу, и поэтому ее следует изучить прежде, чем считать (3.39) пригодным приближением.

Если в процессе рассеяния могут испускаться фермионы, то их спектр должна определять двухточечная функция; она будет появляться в качестве фактора, ответственного за это испускание, но (в импульсном пространстве) умножится на некоторую функцию импульса, обязанную своим происхождением «вершине», в которой происходит испускание. Следовательно, фермионы, которые могут испускаться, можно получить из двухточечной функции, рассматривая ее сперва как функцию Грина системы частиц (или, лучше, состояний) в отсутствие взаимодействия.

Тогда приближение (3.39) указывает на существование трех фермионных состояний, относящихся к нулевой массе: двух призрачных и одного дипольного<sup>1)</sup> [73—75]. В этом можно убедиться, выполнив в (3.39) интегрирование по  $p_0$ . Тогда получим ( $|p| = |\mathbf{p}|$  и  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} = \sqrt{|p|^2 + \kappa^2}$ )

$$F(x, x') = - (2\pi)^{-3} \int d^3 p e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left\{ \frac{E + \sigma \mathbf{p}}{2E} e^{-iE(x - x')_0} - \frac{d}{dp_0} \left[ \frac{(\kappa^2 + p^2)(p_0 + \sigma \mathbf{p})}{(p_0 + |p|)^2} e^{-ip_0(x - x')_0} \right]_{p_0 = |p|} \right\}. \quad (3.43)$$

Если это выражение разбить на два члена, соответствующих параллельным и антипараллельным векторам  $\sigma$  и  $\mathbf{p}$ , то (3.43) перейдет в

$$F(x, x') = - (2\pi)^{-3} \int d^3 p e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')} \times \left\{ \frac{|p| + \sigma \mathbf{p}}{2|p|} a_+ + \frac{|p| - \sigma \mathbf{p}}{2|p|} a_- \right\}, \quad (3.44)$$

<sup>1)</sup> Мы переводим термин «ghost» как «призрачный», а «dipole-ghost» как «дипольный». Под призрачным состоянием автор понимает собственный вектор оператора энергии-импульса, имеющий отрицательную или нулевую норму. Дипольное состояние определенным значением 4-импульса не обладает. — *Прим. ред.*

где

$$\begin{aligned}
 a_+ &= \frac{E + |p|}{2E} e^{-iE(x-x')_0} - \\
 &\quad - \left[ -i\kappa x_0 + \frac{|p|}{\kappa} - \frac{\kappa}{4|p|} \right] e^{-i|p|x_0} \frac{\kappa}{2|p|} e^{i|p|x_0} - \\
 &\quad - \frac{\kappa}{2|p|} e^{-i|p|x_0} \left[ +i\kappa x'_0 + \frac{|p|}{\kappa} - \frac{\kappa}{4|p|} \right] e^{i|p|x'_0}, \quad (3.45) \\
 a_- &= \frac{E - |p|}{2E} e^{-iE(x-x')_0} - \frac{\kappa^2}{4|p|^2} e^{-i|p|(x-x')_0}.
 \end{aligned}$$

Пять членов (3.45) этого выражения можно интерпретировать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F(xx') &= \int d^3p \{ \langle 0 | \chi(x) | N_p^+ \rangle \langle N_p^+ | \chi^*(x') | 0 \rangle + \\
 &\quad + \langle 0 | \chi(x) | D^+ \rangle \langle G^+ | \chi^*(x') | 0 \rangle + \\
 &\quad + \langle 0 | \chi(x) | G^+ \rangle \langle D^+ | \chi^*(x') | 0 \rangle + \\
 &\quad + \langle 0 | \chi(x) | N^- \rangle \langle N^- | \chi^*(x') | 0 \rangle + \\
 &\quad + \langle 0 | \chi(x) | G^- \rangle \langle G^- | \chi^*(x') | 0 \rangle \}. \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Символы  $N$ ,  $D$ ,  $G$  относятся соответственно к нуклонным, дипольным и призрачным состояниям.

Так как, согласно § 6 гл. 2,

$$\langle 0 | \chi(x) \chi^*(x') | 0 \rangle = {}_0\chi(x)_n g^{nl} i\chi^*(x')_0, \quad (3.47)$$

то из (3.46) видно, что метрика в пространстве трех состояний  $D^+$ ,  $G^+$ ,  $G^-$  имеет вид

$$g^{nl} = \begin{matrix} & \begin{matrix} D^+ & G^+ & G^- \end{matrix} \\ \begin{matrix} D^+ \\ G^+ \\ G^- \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (3.48)$$

Дипольное состояние  $D^+$  не является собственным вектором энергии и импульса. Это ясно из того, что в (3.45) в матричный элемент  $\langle 0 | \chi(x) | D^+ \rangle$  входит член, содержащий множитель  $x_0$ . В § 6 гл. 2 подчеркивалось, что для построения полного гильбертова пространства



собственных состояний энергии и импульса, вообще говоря, недостаточно.

Ситуация, подобная этой, была подробно изучена в модели Ли [71, 72, 54, 74], которую можно проанализировать полностью. Наиболее существенные математические особенности этой модели обсуждаются в приложении II. Поскольку рассматриваемая проблема является гораздо более сложной, результаты анализа модели Ли перенести на нее автоматически нельзя; однако их можно использовать в качестве руководящего принципа для дальнейших математических выводов. Исходя из аналогии с моделью Ли, можно ожидать, что для тех решений задачи рассеяния, в которых в входящих и уходящих волнах появляются все три состояния  $D^+$ ,  $G^+$  и  $G^-$ , физическую интерпретацию проводить нельзя и не нужно. С другой стороны, в входящих волнах к реальным частицам можно добавить состояние  $G^+$  с произвольным весом; так как норма  $G^+$  равна нулю, такое добавление не изменит физической интерпретации входящей группы частиц. Воспользуемся этой свободой для такого изменения фактора, возникающего в уходящих волнах фермионов из-за вершины, чтобы в точке  $p^2=0$  он исчезал. Тогда двойной полюс двухточечной функции превратится в простой и при  $p^2=0$  в уходящих волнах также останется только состояние  $G^+$ ; для физической интерпретации оно снова будет несущественным. Таким способом можно найти определенную совокупность решений задачи рассеяния, которая допускает построение унитарной  $S$ -матрицы. Для этой совокупности характерно то, что, несмотря на сингулярность двухточечной функции при  $p^2=0$ , никакого испускания фермионов нулевой массы наблюдаться не должно; унитарность  $S$ -матрицы сохраняется без каких-либо вкладов с их стороны.

Эти математические свойства приближения (3.39) для двухточечной функции неожиданно хорошо согласуются с реальной экспериментальной ситуацией. Сингулярность при  $p^2=0$  некоторым способом представляет лептоны. Тогда, с одной стороны, эти частицы будут служить для регуляризации двухточечной функции; с другой стороны, в данном приближении они не будут

принимать участия ни в каких процессах рассеяния и не будут участвовать в сильных взаимодействиях тяжелых частиц, что согласуется с наблюдениями.

Поэтому мы ожидаем, что приближение (3.39) для двухточечной функции действительно может быть очень полезным: оно допускает для сильных взаимодействий построение унитарной  $S$ -матрицы и (что тесно с этим связано) стационарных состояний с разумными свойствами. Эти вопросы будут подробно обсуждаться в гл. 5—7.

## § 5. Асимптотические свойства четырехточечной функции и вырождение основного состояния

Четырехточечная функция типа

$$F(xx'yy') = \langle 0 | \chi(x) \chi^*(x') \chi(y) \chi^*(y') | 0 \rangle \quad (3.49)$$

содержит большое количество сведений об упругом рассеянии двух фермионов, существовании и массах бозонов и т. д.; эти данные нельзя подытожить с помощью простых приближений, подобных приближениям для двухточечных функций. Однако имеются предельные случаи, когда четырехточечные функции тесно связаны с двухточечными. Мы кратко обсудим специальный предельный случай, в котором две переменные  $x, x'$  отделены от двух других переменных  $y, y'$  очень большим пространственно-подобным расстоянием.

Если четырехточечную функцию (3.49) записать в виде

$$F(xx'yy') = \langle 0 | \chi(x) \chi^*(x') | J \rangle \langle J | \chi(y) \chi^*(y') | 0 \rangle, \quad (3.50)$$

то для очень больших расстояний существенными будут лишь такие промежуточные состояния  $|J\rangle$ , импульс и энергия которых очень малы. Поэтому наиболее важным промежуточным состоянием является само основное состояние  $|0\rangle$ , и можно ожидать, что в пределе четырехточечная функция стремится к произведению двух двухточечных, т. е. в (3.50)  $|J\rangle$  заменяется просто на  $|0\rangle$ .

Однако если основное состояние вырождено, т. е. менее симметрично, чем фундаментальное уравнение (3.1), то это утверждение нужно модифицировать. Из нереля-

тивистской квантовой механики хорошо известно, что не полностью симметричное основное состояние действительно может встречаться. Так, основные состояния ферромагнетика, кристалла или сверхпроводника являются очевидными примерами вырождения этого типа. В первых двух случаях пространственное вращение, а в третьем калибровочное преобразование переводят исходное основное состояние в новое, отличающееся от него. В физике элементарных частиц подобная возможность вырождения основного состояния сначала рассматривалась в связи с изоспиновой группой [59, 60], а позднее — и с другими [75—77]. Если основное состояние инвариантно относительно группы Лоренца, но вырождено по отношению к другим непрерывным группам, то будет существовать континуум промежуточных состояний  $|J\rangle$  с нулевой энергией и импульсом и сколь угодно малыми значениями этих величин. В этом случае в пределе большого пространственно-подобного расстояния между  $x, x'$  и  $y, y'$  четырехточечная функция (3.50) будет содержать произведение не только двухточечных функций типа  $\langle 0|\chi(x)\chi^*(x')|0\rangle$ , но и произведение более общих двухточечных функций  $\langle 0|\chi(x)\chi^*(x')|J\rangle$ , где  $|J\rangle$  отличается от  $|0\rangle$  соответствующим преобразованием; возможно, что этот член умножается на коэффициент, слабо убывающий с расстоянием (как дальнедействующие силы). Если такие обобщенные двухточечные функции в импульсном пространстве содержат полюса, то они тем самым указывают на существование «странных» частиц, т. е. частиц, которые относительно группы Лоренца обладают нормальными трансформационными свойствами, а относительно группы, по которой вырождено основное состояние, — «странными». Если следовать этому пути, то существование наблюдаемых странных частиц можно рассматривать как естественное следствие вырождения основного состояния по отношению к изоспиновой группе [78, 79].

Теория странных частиц будет подробно обсуждаться в гл. 7; но вырождение основного состояния имеет и другую сторону, о которой следует упомянуть уже сейчас. Так как пространство и время бесконечны, то оператор, который совершает рассматриваемое преобразование во всем

основном состоянии «мира», построить из полевых операторов с помощью конечной процедуры нельзя. Однако построение операторов, совершающих это преобразование в конечной области, должно быть возможным; благодаря вырождению количество энергии, необходимое для этого преобразования, при увеличении области должно уменьшаться.

Такие операторы не будут коммутировать с полевыми операторами, заданными в этой области, и вызовут изменения в двухточечной функции; тем самым они указывают на существование таких матричных элементов типа двухточечных функций, которые приводят от вакуума к бозонному состоянию нулевой массы (равенство массы нулю следует из того, что при увеличении длины волны энергия уменьшается).

На существовании таких состояний было сделано ударение в теореме Голдстоуна [80—86]. В кристалле или сверхтекучей жидкости роль голдстоуновских частиц (несколько обобщенных) играют звуковые кванты (фононы). В ферромагнетике их место занимают блоховские спиновые волны [87]. В физике элементарных частиц при нарушении изоспиновой группы асимметрией основного состояния соответствующими голдстоуновскими частицами являются световые кванты, или фотоны (в основном их продольная и скалярная части в кулоновском поле). Поля, связанные с этими частицами, имеют все свойства, необходимые для «классических» полей. Они бозонного типа, описываются скалярами, могут иметь отношение к другим полям, которые являются векторами и тензорами, и имеют большой радиус действия. Связь квантовой электродинамики с теоремой Голдстоуна будет подробно обсуждаться в гл. 8.

## § 6. Проблема локальных законов сохранения

Если бы уравнение (3.1) определяло классическую теорию поля, то существовало бы некоторое число локальных законов сохранения, тесно связанных с его свойствами инвариантности. Действительно, если определить

$$j_\mu = \chi^* \sigma_\mu \chi \quad \text{и} \quad j_{\mu, \kappa} = \chi^* \sigma_\mu \tau_\kappa \chi, \quad (3.51)$$

то в классической теории мы придем к уравнениям непрерывности

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial j_{\mu, k}(x)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (3.52)$$

В согласии с инвариантностью уравнения (3.1) относительно калибровочного (3.12) и изоспинового (3.10) преобразований величины

$$Q = \int j_0 d^3x \quad \text{и} \quad T_k = \int j_{0, k} d^3x \quad (3.53)$$

сохранялись бы, т. е. были бы постоянными.

В квантовой теории поля, основанной на (3.1) и (3.22), ситуация совершенно другая. Несмотря на то что операторы преобразований коммутируют с  $S$ -матрицей и поэтому определяют сохраняющиеся величины, их, как правило, нельзя представить с помощью простых выражений типа (3.53). Локальные же законы сохранения, подобные (3.52), вообще не существуют.

Легко видеть, что аргументы, которые в классической теории поля приводят к (3.52), в квантовой теряют силу; это связано с тем, что произведение двух полевых операторов в одной и той же точке является сингулярной величиной. Если начать с выражения

$$j_\mu(x, \varepsilon) = \chi^*(x + \varepsilon) \sigma_\mu \chi(x), \quad (3.54)$$

то мы увидим, что (3.1) приводит к

$$\frac{\partial j_\mu(x, \varepsilon)}{\partial x_\mu} = i l^2 \{ : (\chi^*(x + \varepsilon) \sigma_\nu \chi(x + \varepsilon)) \chi^*(x + \varepsilon) : \sigma^\nu \chi(x) - \chi^*(x + \varepsilon) \sigma^\nu : \chi(x) (\chi^*(x) \sigma_\nu \chi(x)) : \}. \quad (3.55)$$

Наиболее сингулярная часть (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) величины, стоящей справа, возникает из вакуумного среднего произведений типа  $\chi^*(x + \varepsilon) \sigma_\nu \chi(x)$ . Поэтому мы получим

$$\frac{\partial j_\mu(x, \varepsilon)}{\partial x_\mu} = i l^2 \langle 0 | \chi^*(x + \varepsilon) \sigma^\nu \chi(x) | 0 \rangle \times \\ \times [ : \chi^*(x + \varepsilon) \sigma_\nu \chi(x + \varepsilon) : - : \chi^*(x) \sigma_\nu \chi(x) : ] + \dots \quad (3.56)$$

Здесь  $+$  ... означает другие аналогичные и менее сингулярные члены. Поведение этого вакуумного среднего при

малых  $\varepsilon$  до сих пор не известно. Если следовать предположению (3.33) Миттера [68], то (3.56) переходит в

$$\frac{\partial j_\mu(x, \varepsilon)}{\partial x_\mu} = \text{const} \cdot \frac{\varepsilon^v}{\varepsilon^2} f_{\text{пер}}(\ln \varepsilon^2) \times \\ \times [ : \chi^*(x + \varepsilon) \sigma_v \chi(x + \varepsilon) : - : \chi^*(x) \sigma_v \chi(x) : ]. \quad (3.57)$$

Так как в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина в правой части не определена, то нет никаких причин, по которым она должна обращаться в нуль. Для некоторых матричных элементов  $\partial j_\mu(x, \varepsilon)/\partial x_\mu$  она может равняться нулю, а для других — нет. Для токов  $j_{\mu, k}(x, \varepsilon)$  ситуация в основном та же.

Операторы  $j_\mu(x, \varepsilon)$  и  $j_{\mu, k}(x, \varepsilon)$  будут содержать матричные элементы, описывающие рождение и уничтожение бозонов; эти матричные элементы должны быть определены даже при  $\varepsilon = 0$ . Если бозон обладает спином 0 и импульсом  $J_\mu$ , то матричный элемент будет иметь следующий общий вид:

$$\langle 0 | j_\mu(x, 0) | B \rangle = \text{const} \cdot J_\mu e^{iJx}. \quad (3.58)$$

Локальный закон сохранения (3.52) сразу приводил бы к заключению, что  $J_\mu^2$  (а следовательно, и масса бозона) равняется нулю. Однако уравнение (3.57) показывает, что это не обязательно; бозоны нулевого спина с таким же успехом могут иметь массу, отличную от нуля.

Несмотря на отсутствие локальных законов сохранения, сохраняющиеся величины типа изоспина, импульса, заряда и т. д. не следует считать размазанными по всему пространству. Действительно, как хорошо известно в обычной теории поля, из операторов свободных частиц или асимптотических операторов, которые обсуждались в § 1 гл. 2, можно построить локальные векторные токи, удовлетворяющие уравнению непрерывности (3.52). Если массы свободных частиц отличны от нуля, то эти операторы не позволяют построить локальные псевдовекторные токи. В связи с четырехкомпонентным вариантом теории (3.22) в § 3 подчеркивалось, что преобразование  $\psi \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)\psi$  ей не принадлежит. Но векторные токи, по своим трансформационным свойствам соответствующи-

щие четырем токам (3.51), удовлетворяют уравнению непрерывности.

Поэтому неопределенность локализации сохраняющихся величин ограничена радиусом взаимодействия. Если в данную минуту пренебречь электромагнитными и слабыми взаимодействиями, то эти величины можно представлять локализованными вокруг рассматриваемых частиц в области с размерами  $10^{-13}$  см. Для интерпретации экспериментов этого вполне достаточно.

Согласно аксиоме Хаага [40], для построения полного гильбертова пространства достаточно полевых операторов, заданных в конечном, но сколь угодно малом интервале времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Поэтому с математической точки зрения следует ожидать, что через них можно представить и операторы  $Q$ ,  $T_k$ , фигурирующие в (3.53). Следовательно, мы можем написать

$$Q = \int J_0(x) d^3x \quad \text{и} \quad T_k = \int J_{0,k}(x) d^3x, \quad (3.59)$$

где  $J_0(x)$  и  $J_{0,k}(x)$  конструируются из полевых операторов в промежутке от  $t$  до  $t + \Delta t$ , — возможно, с помощью нелокальной операции. Независимо от ее природы надо ожидать, что плотности  $J_0$  и  $J_{0,k}$  могут рассматриваться как временные компоненты векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial J_{\mu,k}(x)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (3.60)$$

Это следует из того, что (как мы знаем)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T_k}{\partial t} = 0.$$

Одним из правдоподобных способов построения  $J_\mu(x)$  и  $J_{\mu,k}(x)$  было бы предположение, что эти токи можно получить с помощью предельного перехода

$$J_\mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{ \chi^*(x + \varepsilon) \sigma_\mu \chi(x) - \chi(x) \sigma_\mu^T \chi^*(x + \varepsilon) + \tilde{\chi}^*(x + \varepsilon) \bar{\sigma}_\mu \tilde{\chi}(x) - \tilde{\chi}(x) \bar{\sigma}_\mu^T \tilde{\chi}^*(x + \varepsilon) \}. \quad (3.61)$$

в то время как для псевдовекторных токов соответствующая процедура сходиться не будет. Аналогичные соотношения справедливы и для  $J_{\mu, k}(x)$ . В этом случае единственной нелокальной операцией, входящей в построение  $J_{\mu}(x)$  и  $J_{\mu, k}(x)$ , было бы пространственное отражение, связывающее  $\chi(x)$  и  $\tilde{\chi}(x)$ , которые фигурируют в уравнениях (3.20). Приводит ли предельный переход (3.61) на самом деле к сходящимся результатам, можно выяснить лишь после более тщательного исследования сингулярности двухточечной функции на световом конусе.



## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

**§ 1. Общие замечания о приближенных методах в квантовой теории поля**

Математические трудности, возникающие при попытке отыскать решения какой-либо проблемы квантовой теории поля, являются гораздо более серьезными, чем в квантовой механике. В основном они обусловлены степенью сложности, которая следует непосредственно из того экспериментального факта, что (если применить хорошо известное парадоксальное выражение) «каждая элементарная частица состоит из всех других элементарных частиц». В квантовой механике атом водорода состоит из протона и электрона; поэтому для его описания достаточно волновой функции, зависящей от их координат. В физике элементарных частиц протон потенциально состоит из нуклона и бозона, или нуклона и двух бозонов и т. д., или из нуклона и нуклон-антинуклонной пары, или нуклона и двух пар и т. д. Следовательно, для описания свойств отдельного протона в принципе нужно записывать бесконечный ряд волновых функций, зависящих от одной, двух или вообще любого числа переменных. Аналогично математические соотношения, из которых должны определяться массы или поперечные сечения, можно задать лишь в виде бесконечной системы уравнений, содержащих функции любого числа переменных. Следовательно, нельзя надеяться найти точные решения, используя простые аналитические функции. Нужно искать приближенные решения; поэтому основной вопрос звучит так: чем можно пренебречь, чтобы добиться заданной степени точности?

Из интуитивных соображений следует ожидать, что вероятность обнаружить, например, протон, состоящим из очень большого числа частиц, чрезвычайно мала. Поэтому теми частями полной волновой функции, которые

означают, что рассматриваемая частица состоит из очень большого числа других, можно пренебречь. В этом случае вычисления должны ограничиваться функциями не более  $n$  переменных; с ростом  $n$  степень точности будет повышаться. Из бесконечной системы нужно отобрать конечное число уравнений, относящихся к функциям не более  $n$  переменных. Чтобы получить достаточно полную систему для неизвестных функций, следует включать в нее и такие уравнения, которые в своей точной форме содержат функции с числом переменных, превышающим  $n$ . Затем их нужно аппроксимировать, связывая с функциями не более  $n$  переменных. Эта связь как раз и определяет вид используемого приближения. При такой общей процедуре одно из граничных условий, обсуждавшихся в § 3 гл. 2, будет удовлетворяться автоматически. В принципе волновая функция, описывающая каждое состояние, содержит части, зависящие от сколь угодно большого числа переменных. Определение их вкладов в норму представляет серьезную математическую проблему. В приближенной волновой функции, когда число переменных выше  $n$ , этими частями просто пренебрегают; то же относится и к их вкладам в норму. Поэтому части с очень многими переменными для конечности нормы опасности не представляют, и граничное условие, относящееся к области чрезвычайно большого числа переменных, удовлетворяется автоматически.

Вопрос о том, приводит ли эта процедура к сходящемуся математическому процессу, в большинстве случаев остается открытым. Как правило, сходимость определенного приближенного метода можно проверить лишь на простых моделях, которые обладают некоторыми важными свойствами, общими с квантовой теорией поля. Но доказательство сходимости для упрощенных моделей не обязательно означает, что и вся полевая теория тоже сходится. Кроме того, сходимость приближенных собственных значений к истинным, возможно, не означает, что то же справедливо и для волновых функций.

Очевидно, что старые методы теории возмущений, которые столь успешно применялись в квантовой механике, бесполезны для теории, определяемой уравнением (3.1); нельзя считать, что один из его членов гораздо меньше

других. Такая теория нуждается в приближениях типа метода Ритца в квантовой механике, когда сначала нужно угадать общий вид волновой функции, а затем, изменяя параметры или вводя другие усовершенствования, можно попытаться подойти к истинной волновой функции все ближе и ближе. Часто исходными уравнениями оказываются релятивистские интегральные уравнения типа Бете — Салпетера [88—91]; в этом случае могут быть полезны методы, развитые математиками для общих интегральных уравнений типа Фредгольма [92]. Иногда предварительные соображения о виде пробной волновой функции могут подсказать результаты теории возмущений.

Степень сложности, которая в квантовой теории поля является основным источником трудностей, привела к введению своеобразной стенографической записи интегральных выражений и уравнений; она обладает большим преимуществом, так как дает математической процедуре физическую интерпретацию. Посредством фейнмановских диаграмм [93] сложные интегралы можно изображать в виде простых рисунков, дающих некоторую возможность проникнуть в механизм описываемого взаимодействия. В дальнейшем мы часто будем использовать технику фейнмановских диаграмм (в несколько обобщенной форме) для записи уравнений на собственные значения или соотношений для определения констант связи.

## § 2. Приближенные представления векторов состояния усеченными наборами функций

В квантовой теории поля некоторые из приближенных методов отправляются от матричных элементов хронологических произведений полевых операторов. Особенно полезны эти матричные элементы при вычислениях, касающихся  $S$ -матрицы. Состояние  $|\psi\rangle$  системы, которая характеризуется фундаментальным полевым уравнением (3.1), можно определить бесконечным набором функций

$$\tau(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) = \langle 0 | T \chi(x_1) \chi(x_2) \dots \dots \chi^*(y_1) \chi^*(y_2) \dots | \psi \rangle. \quad (4.1)$$

Эти  $\tau$ -функции можно назвать ковариантным представлением  $|\psi\rangle$ . Символ  $T$  означает, что операторы расположены в порядке убывания временных аргументов справа налево.

Из набора  $\tau$ -функций можно образовать второй набор функций [94], если положить

$$\begin{aligned} \tau(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) = & \varphi(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) + \\ & + (-1)^z \varphi(x_2 \dots | y_2 \dots) \langle 0 | T \chi(x_1) \chi^*(y_1) | 0 \rangle + \\ & + (-1)^z \varphi(x_2 \dots | y_1 y_3 \dots) \langle 0 | T \chi(x_1) \chi^*(y_2) | 0 \rangle + \dots \\ & \dots + (-1)^z \varphi(x_3 \dots | y_3 \dots) \langle 0 | T \chi(x_1) \chi^*(y_1) | 0 \rangle \times \\ & \times \langle 0 | T \chi(x_2) \chi^*(y_2) | 0 \rangle + \dots \quad (4.2) \end{aligned}$$

Здесь  $z$  в каждом выражении означает число перестановок, необходимых для того, чтобы разместить операторы так, как они стоят в вакуумных средних [в последующих уравнениях символ  $(-1)^z$  всегда будет применяться в этом смысле]. Набор  $\varphi$ -функций можно рассматривать как второе ковариантное представление состояния  $|\psi\rangle$ , использующее второй набор базисных векторов. По-видимому, основные сингулярности на световых конусах  $(x_n - y_m)^2 = 0$  у  $\tau$ -функций содержатся в двухточечных функциях; поэтому на световых конусах  $\varphi$ -функции должны быть менее сингулярными, чем  $\tau$ -функции.  $\varphi$ -функции можно построить из  $\tau$ -функций в том случае, когда известны двухточечные функции.

Основное предположение так называемого «нового» метода Тамма — Данкова [95—98] состоит в том, что в качестве приближения для истинной волновой функции состояния  $|\psi\rangle$  берется «усеченный» набор  $\varphi$ -функций, в котором все  $\varphi$  с числом переменных, превышающем  $n$ , полагаются равными нулю. Это предположение (оправдывается оно или нет) дает возможность перейти от полевого уравнения к системе, достаточной для определения конечного набора  $\varphi$ -функций состояния  $|\psi\rangle$ . Если известна истинная двухточечная функция, то таким способом можно получить (как и в обычной квантовой механике) приближенные уравнения на собственные значения. К сожалению, пока не решена вся проблема в целом, двухточечную функцию мы не можем знать точно.

Поэтому необходимо, чтобы в (4.2) она была заменена приближенной; тогда проблема сходимости нового метода Тамма — Данкова представляется в следующем виде.

Предположим, что собственное значение массы определенного состояния вычислено с использованием приближенной двухточечной функции путем последовательного перехода в усеченном наборе  $\varphi$ -функций ко все более высоким числам  $n$ . Тогда возникает вопрос, стремятся ли полученные таким способом собственные значения при увеличении  $n$  к пределу и зависит ли его величина от приближенной двухточечной функции. При теперешнем состоянии квантовой теории поля мы еще далеки от ответа на этот вопрос; но его можно дать для сильно упрощенной модели. Ангармонический осциллятор, описываемый уравнением движения  $\ddot{q} = -\alpha q^3$ , имеет некоторое сходство с (3.1), и его можно трактовать с помощью нового метода Тамма — Данкова.  $\tau$ -функции здесь зависят от временных (вместо пространственно-временных) переменных, а двухточечную функцию можно аппроксимировать двухточечной функцией гармонического осциллятора, умноженной на произвольный коэффициент. В этом случае (который сводится к одновременному формализму) Штумпф, Вагнер и Валь [99] смогли доказать следующее: при увеличении  $n$  собственные значения действительно стремятся к предельной величине; она не зависит от приближенной двухточечной функции (когда произвольный коэффициент меняется в довольно широкой области значений); предельная величина совпадает с точным квантовомеханическим решением. В численных расчетах уже при  $n=10$  относительные отклонения в низшем собственном значении имели порядок  $10^{-5}$ . Этот результат можно рассматривать как некоторое оправдание нового метода Тамма — Данкова даже в случае полевой теории; однако он не является каким-либо доказательством его сходимости.

Другие приближенные методы, которые предназначены главным образом для вычисления  $S$ -матричных элементов, используют в основном  $\tau$ -функции переходов из вакуума в вакуум, т. е. вакуумные средние от хронологических произведений. Эти функции часто называются

функциями Грина [100] или двухточечными функциями, четырехточечными и т. д. Однако термин «функция Грина» в какой-то степени вводит в заблуждение. Функция Грина связана с линейным дифференциальным уравнением, а следовательно, и с точно определенной массой. Двухточечные или четырехточечные функции можно построить из функций Грина (а может быть, и из других членов) путем интегрирования по массовому спектру (с массовой плотностью, простирающейся в бесконечность), но сами они функциями Грина не являются. Из этого набора вакуумных  $\tau$ -функций можно построить третий [101, 102] набор, определяя его следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau(x_1 x_2 \dots x_n | y_1 y_2 \dots y_n) = & \\ = (-1)^2 \eta(x_1 | y_1) \eta(x_2 | y_2) \dots \eta(x_n | y_n) + \text{перестановки} + & \\ + (-1)^2 \eta(x_1 x_2 | y_1 y_2) \eta(x_3 | y_3) \dots \eta(x_n | y_n) + \text{перестановки} + & \\ + (-1)^2 \eta(x_1 x_2 x_3 | y_1 y_2 y_3) \eta(x_4 | y_4) \dots \eta(x_n | y_n) + & \\ & + \text{перестановки} + \\ + (-1)^2 \eta(x_1 x_2 | y_1 y_2) \eta(x_3 x_4 | y_3 y_4) \eta(x_5 | y_5) \dots + & \\ & + \text{перестановки} + \dots \quad (4.3) \end{aligned}$$

Для простейших  $\eta$ -функций соотношения таковы:

$$\begin{aligned} \tau(x_1 | y_1) &= \eta(x_1 | y_1), \\ \tau(x_1 x_2 | y_1 y_2) &= - \eta(x_1 | y_1) \eta(x_2 | y_2) + \\ &+ \eta(x_1 | y_2) \eta(x_2 | y_1) + \eta(x_1 x_2 | y_1 y_2), \\ \tau(x_1 x_2 x_3 | y_1 y_2 y_3) &= \\ = - \eta(x_1 | y_1) \eta(x_2 | y_2) \eta(x_3 | y_3) \pm \text{перестановки} + & \\ + \eta(x_1 x_2 | y_1 y_2) \eta(x_3 | y_3) \pm \text{перестановки} + & \\ &+ \eta(x_1 x_2 x_3 | y_1 y_2 y_3). \quad (4.4) \end{aligned}$$

Такие  $\eta$ -функции часто называются усеченными функциями Грина, хотя и этот термин снова может ввести в некоторое заблуждение.  $\eta$ -функции обладают важным свойством стремиться к нулю, когда какая-то переменная или группа переменных отделена от остальных большим пространственно-подобным расстоянием.  $\eta$ -функции мо-

жно рассматривать как представление основного состояния  $|0\rangle$ ; тогда для установления соотношений между различными  $\eta$ -функциями снова можно использовать левое уравнение (3.1). Если пренебречь всеми  $\eta$ -функциями с числом переменных, превышающим  $n$ , то тем самым будет определено некоторое приближение, для которого можно постулировать лишь конечное число этих соотношений. В отличие от случая  $\varphi$ -функций, для которых возникающие уравнения линейны, соотношения между  $\eta$ -функциями нелинейны.

Наконец, можно определить четвертый набор функций [102]:

$$\begin{aligned} \tau(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) = & \zeta(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) + \\ & + (-1)^z \zeta(x_2 \dots | y_2 \dots) \eta(x_1 | y_1) + \text{перестановки} + \\ & + (-1)^z \zeta(x_3 \dots | y_3 \dots) \eta(x_1 | y_1) \eta(x_2 | y_2) + \text{перестановки} + \\ & + (-1)^z \zeta(x_3 \dots | y_3 \dots) \eta(x_1 x_2 | y_1 y_2) + \text{перестановки} + \\ & + (-1)^z \zeta(x_4 \dots | y_4 \dots) \eta(x_1 | y_1) \eta(x_2 | y_2) \eta(x_3 | y_3) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \text{перестановки} + \\ & + (-1)^z \zeta(x_4 \dots | y_4 \dots) \eta(x_1 x_2 | y_1 y_2) \eta(x_3 | y_3) + \text{перестановки} + \\ & + (-1)^z \zeta(x_4 \dots | y_4 \dots) \eta(x_1 x_2 x_3 | y_1 y_2 y_3) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \text{перестановки} + \dots \quad (4.5) \end{aligned}$$

Аналогично наборам  $\tau$ - или  $\varphi$ -функций этот набор  $\zeta$ -функций является представлением рассматриваемого состояния. Для вакуума, т. е. для матричных элементов  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ ,  $\zeta$ -функции равны нулю.  $\zeta$ -функции можно рассматривать как матричные элементы обобщенного виковского произведения:

$$\begin{aligned} \zeta(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) = \\ = \langle 0 | : \chi(x_1) \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \chi^*(y_2) \dots : | \Psi \rangle, \quad (4.6) \end{aligned}$$

в котором все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения (включая операторы для бозонов, связанных состояний и т. д.).

Определить приближение можно, снова полагая нулями все  $\zeta$ -функции с числом переменных, большим  $n$ .

Возможно, что все эти различные приближения приводят к сходящимся математическим процессам. Тогда выбор метода, применяемого в конкретной задаче, будет определяться соображениями удобства. Четыре различных набора функций ( $\tau$ -,  $\varphi$ -,  $\eta$ -,  $\zeta$ -функции), введенных в этом параграфе, можно получить более изящным способом из простых функционалов, определяемых посредством вспомогательных полей. Этот в большей степени формальный взгляд на бесконечные наборы будет обсуждаться в математическом приложении IV.

Хотя говорить о прочном математическом базисе приближенных методов квантовой теории поля было бы, конечно, преждевременным, следует подчеркнуть, что в проведенных исследованиях никаких фундаментальных трудностей, связанных с этими методами, до сих пор обнаружено не было. Трудности, которые столь часто обсуждались в прежние годы, возникали при тщетных попытках применить к взаимодействующим локальным полям каноническое квантование или использовать методы теории возмущений в тех задачах, где она не была обоснована, или безосновательно ограничиться в теории поля гильбертовым пространством с положительной метрикой. Но приближенные методы, которые вытекают из представления состояний усеченными наборами функций, сами по себе серьезных трудностей не вносят.

### § 3. Новый метод Тамма—Данкова

Новый метод Тамма — Данкова [95—98] приближенно представляет векторы состояния с помощью усеченных наборов  $\varphi$ -функций, определяемых формулой (4.2). Чтобы из фундаментального уравнения (3.1) вычислить собственные значения масс или поперечные сечения процессов рассеяния, нужно вывести из него соотношения между  $\tau$ -функциями, а затем перевести их в соотношения между  $\varphi$ -функциями.

Эту общую процедуру можно описать следующим образом. Возьмем  $\tau$ -функцию типа (4.1)

$$\tau(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) = \langle 0 | T \chi(x_1) \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \chi^*(y_2) \dots | \Psi \rangle.$$



Применяя к  $\chi(x_1)$  полевое уравнение (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
 & i\sigma_v \frac{\partial}{\partial x_{1v}} \tau(x_1 \dots | y_1 \dots) = \\
 & = -l^2 \langle 0 | T : \sigma^v \chi(x_1) (\chi^*(x_1) \sigma_v \chi(x_1)) : \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \dots | \Psi \rangle + \\
 & + (-1)^2 c \delta(x_1 - y_1) \langle 0 | T \chi(x_2) \dots \chi^*(y_2) \dots | \Psi \rangle + \\
 & + (-1)^2 c \delta(x_1 - y_2) \langle 0 | T \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \chi^*(y_3) \dots | \Psi \rangle + \dots \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Члены с  $\delta$ -функциями возникают из-за перестановки сомножителей в хронологическом  $T$ -произведении, когда временная координата  $x_1$  пробегает значения временных координат  $y_1, y_2$  и т. д. Коэффициент  $c$  зависит от поведения коммутатора в окрестности начала координат, и *априори* он не известен. Если для двухточечной функции принимается представление Челлена — Лемана (3.25), то  $c$  по существу определяется интегралом  $\int \rho(x^2) d(x^2)$ ; поэтому при каноническом квантовании этот коэффициент будет просто некоторым числом. Однако в теории с взаимодействием типа (3.1) условие (3.35) требует, чтобы  $\int \rho(x^2) d(x^2) = 0$  и, следовательно,  $c = 0$ . Несмотря на это, мы включаем в (4.7) члены вида  $c\delta(x - y)$ , так как в некоторых приближенных методах может быть более удобным сохранять их в любом конечном приближении, а к пределу  $c \rightarrow 0$  переходить лишь вместе с  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому мы пока оставим эти члены неопределенными и проинтегрируем (4.7) с помощью причинной функции Грина, соответствующей уравнению

$$\begin{aligned}
 & i\sigma_v \frac{\partial G}{\partial x_v} = \delta^4(x), \\
 & G(x) = (2\pi)^{-4} \int_c d^4 p e^{-ipx} \frac{\overline{p_v \sigma^v}}{p^2}, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \tau(x_1 \dots | y_1 \dots) = -l^2 \int d^4 x' G(x_1, x') \times \\
 & \times \langle 0 | T \sigma^v : \chi(x') (\chi^*(x') \sigma_v \chi(x')) : \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \dots | \Psi \rangle + \\
 & + \langle 0 | T \chi_0(x_1) \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \dots | \Psi \rangle. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Оператор  $\chi_0(x_1)$ , входящий в (4.9), удовлетворяет уравнению

$$i\sigma_v \frac{\partial \chi_0}{\partial x_v} = 0. \quad (4.10)$$

Предполагается, что в окрестности начала координат коммутатор  $\chi_0(x)$  с  $\chi^*(y)$  стремится к коммутатору  $\chi(x)$  и  $\chi^*(y)$ . Таким образом, действуя на (4.9) оператором  $i\sigma^v (\partial/\partial x_v)$ , мы вернемся к (4.7). Для дальнейших вычислений уточнять этот коммутатор пока нет необходимости. Второй член в (4.9) можно упростить, если ввести

$$F_0(xy) = \langle 0 | T\chi_0(x)\chi^*(y) | 0 \rangle. \quad (4.11)$$

Тогда уравнение (4.10) приводит к

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\chi_0(x_1)\chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \dots | \Psi \rangle = \\ = F_0(x_1y_1)(-1)^z \langle 0 | T\chi(x_2) \dots \chi^*(y_2) \dots | \Psi \rangle + \\ + F_0(x_1y_2)(-1)^z \langle 0 | T\chi(x_2) \dots \chi^*(y_1)\chi^*(y_3) \dots | \Psi \rangle + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подстановка (4.12) в (4.9) дает требуемое соотношение между  $\tau$ -функциями различного числа переменных. Оно содержит функцию  $F_0(xy)$  точно так же, как соотношения между  $\tau$ - и  $\varphi$ -функциями содержат двухточечную функцию  $F(xy)$ . Благодаря (4.10) и постулату, что в начале координат поведение  $F_0(xy)$  и  $F(xy)$  должно быть одинаковым, функция  $F_0(xy)$  однозначно определяется через  $F(xy)$ . Если  $\int \rho(x^v) d(x^2) = 0$ , то и  $F_0(xy) = 0$ . Кроме того, из (4.9) можно заключить, что

$$\begin{aligned} F(xy) = F_0(xy) - l^2 \int G(xx') dx' \langle 0 | T\delta^v : \chi(x') \times \\ \times (\chi^*(x')\sigma_v\chi(x')) : \chi^*(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Если, воспользовавшись (4.2), заменить  $\tau$ -функции  $\varphi$ -функциями, то уравнения (4.9) и (4.12) можно переформулировать как интегральные соотношения для  $\varphi$ -функций. Для этого удобно перевести сначала дифференциальное уравнение (4.7) в уравнение для  $\varphi$ -функций. Тогда в (4.7) члены с  $s\delta(x-y)$  исчезнут, так как из-за дифференцирования функций  $F(xy)$ , входящих в

(4.2), точно такие же слагаемые появятся и в левой части. Уравнение (4.7) можно переписать как

$$\begin{aligned}
 i\sigma_v^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1v}} \varphi(x_1 \dots | y_1 \dots) = & \\
 = -l^2 \sigma_v^{\alpha\beta} \sigma^v, \gamma^\delta \varphi(x_1 x_1 x_2 \dots | x_1 y_1 y_2 \dots) + & \\
 + (-1)^z l^2 \sigma_v^{\alpha\beta} \sigma^v, \gamma^\beta F(x_1 y_1) \varphi(x_1 x_2 \dots | x_1 y_2 \dots) + \text{перестановки} + & \\
 + (-1)^z l^2 \sigma_v^{\alpha\beta} \sigma^v, \gamma^\delta F(x_2 x_1) \varphi(x_1 x_1 x_3 \dots | y_1 y_2 \dots) + & \\
 + \text{перестановки} + (-1)^z l^2 \sigma_v^{\alpha\beta} \sigma^v, \gamma^\delta F(x_1 y_1) F(x_2 x_1) \times & \\
 \times \varphi(x_1 x_3 \dots | y_2 \dots) + \text{перестановки} + (-1)^z l^2 \sigma_v^{\alpha\beta} \sigma^v, \gamma^\delta \times & \\
 \times F(x_1 y_1) F(x_2 x_1) F(x_1 y_2) \varphi(x_3 \dots | y_3 \dots) + & \\
 + \text{перестановки} + i\sigma_v^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1v}} \{ (F_0(x_1 y_1) - F(x_1 y_1)) (-1)^z \times & \\
 \times \varphi(x_2 \dots | y_2 \dots) + \text{перестановки} \}. & \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Это соотношение (которое проще всего получить методами, описанными в приложении IV) можно сразу же преобразовать в интегральное уравнение. Тем самым, если исходить из усеченного набора  $\varphi$ -функций, для них возникает система однородных дифференциальных или интегральных уравнений при условии, что функция  $F(xy)$  задана. Подобно тому как уравнение Шредингера в квантовой механике определяет собственные значения энергии, эта система устанавливает собственные значения масс для состояния  $|\psi\rangle$ . Степень приближения ограничивается точностью, с которой усеченный набор  $\varphi$ -функций может представлять вектор состояния. Характерной чертой нового метода Тамма — Данкова является то, что (4.14) на световом конусе не содержит сингулярности от  $F_0(xy)$  — она компенсируется сингулярностью функции  $F(xy)$ . По существу квантование в (4.14) вводится посредством функции  $F(xy)$ , которая на световом конусе имеет сингулярность, отличающуюся от  $\delta$ -образной особенности линейной теории.

Следует отметить, что даже если функции  $F(xy)$ , входящие в (4.14), очень сильно отличаются от истинных

двухточечных функций, эти уравнения являются все же точными; функции должны быть одинаковыми лишь в окрестности начала координат, т. е. в (4.7)  $F(xy)$  приводят к тем же членам  $\delta(x-y)$ , что и истинные двухточечные функции. Точный вид  $F(xy)$  станет важным тогда и только тогда, когда система (4.14) уравнений для  $\varphi$ -функций обрывается на определенном числе переменных. В последующих вычислениях [в соответствии с (3.35) и (3.36)] мы всегда будем предполагать, что  $F_0(xy) = 0$ .

В то время как расчет собственных значений масс с помощью однородных линейных интегральных уравнений в принципе (но не при фактических вычислениях) является простым, определение  $F(xy)$  требует решения нелинейных уравнений. Допустим, что процедура, описываемая формулами (4.2), (4.9) и (4.14), приводит для фермионных состояний к уравнению на собственные значения, которое после отбрасывания всех высших  $\varphi$ -функций может быть записано для низшей функции  $\tau(x) = -\varphi(x) = \langle 0 | \chi(x) | \psi \rangle$  в (несколько упрощенной) форме

$$i\sigma_v \frac{\partial}{\partial x_v} \varphi(x) = i\sigma_v \frac{\partial}{\partial x_v} \int d^4x' \mathcal{L}(xx') \varphi(x'). \quad (4.15)$$

Тогда мы ожидаем, что для  $F(xy)$  имеет место уравнение

$$i\sigma_v \frac{\partial}{\partial x_v} F(xy) = i\sigma_v \frac{\partial}{\partial x_v} \int d^4x' \mathcal{L}(xx') F(x'y) + \mathcal{M}(xy), \quad (4.16)$$

где и  $\mathcal{L}(xx')$  и  $\mathcal{M}(xy)$  зависят от  $F(xy)$  очень сложным образом. Если функции  $F(xy)$  и т. д. записать в импульсном пространстве

$$F(xy) = (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{ip(x-y)} F(p),$$

то уравнения (4.15) и (4.16) превратятся в

$$[1 - \mathcal{L}(p^2)] \sigma^v p_v \varphi(p) = 0, \quad (4.17)$$

$$[1 - \mathcal{L}(p^2)] \sigma^v p_v F(p) = \mathcal{M}(p^2)$$

$$F(p) = \frac{\bar{\sigma}^v p_v \mathcal{M}(p^2)}{p^2 [1 - \mathcal{L}(p^2)]}; \quad (4.18)$$

$\mathcal{L}(p^2)$  и  $\mathcal{M}(p^2)$  снова являются сложными функционалами от  $F(p)$ .

Полный вывод уравнения типа (4.18) будет обсуждаться в § 5. В настоящий момент мы ограничимся утверждением, что между процедурой вычисления собственных значений масс для фермионов и определением двухточечной функции должна существовать тесная связь; формально ее устанавливает «неоднородный член»  $\mathcal{M}(p^2)$ . Однако уже здесь следует подчеркнуть, что в случае нелинейного уравнения различие между «однородным» и «неоднородным» членами является чисто формальным и не имеет никакого математического содержания. Смысл этой связи состоит лишь в том, что полюса двухточечной функции совпадают с дискретными решениями уравнения на собственные значения. В то же время отыскание собственных значений требует решения системы однородных линейных интегральных уравнений, а нахождение двухточечной функции — решения сложных нелинейных интегральных уравнений, т. е. с математической точки зрения совершенно другой задачи. Как близкую аналогию нерелятивистской квантовой механике или квантовой теории поля можно рассматривать лишь первую процедуру. В нерелятивистской квантовой теории поля коммутатор полей задается в виде  $\delta$ -функции, а все остальное получается при решении сложных линейных уравнений, по существу уравнений Шредингера. Если в релятивистской теории поля задана двухточечная функция, то все остальное опять-таки получается при решении линейных уравнений. При этом двухточечную функцию можно также заменить коммутатором в окрестности светового конуса, поскольку остальную ее часть удастся тогда восстановить с помощью аналитического продолжения. Следовательно, информацию, необходимую для написания системы однородных уравнений и отыскания их собственных значений, в обоих случаях дает не только фундаментальное поле уравнение, но и знание коммутатора в окрестности начала координат.

Однако при рассмотрении второй части проблемы аналогия между релятивистской и нерелятивистской теориями теряет силу. В нерелятивистской теории коммутатор

задается просто в виде  $\delta$ -функции; в релятивистской же теории его следует вычислять из сложного нелинейного уравнения. Эта сторона проблемы будет обсуждаться в § 5.

Первая часть проблемы требует также предписания относительно выбора из бесконечной системы (4.2) и (4.14) уравнений для усеченного набора  $\varphi$ -функций. Эта бесконечная система имела бы силу лишь для точного представления вектора состояния  $|\psi\rangle$ . С математической точки зрения наиболее естественным будет постулат, что все уравнения бесконечной системы (4.2) и (4.14) для усеченного набора  $\varphi$ -функций должны приближенно выполняться с наименьшей возможной ошибкой. При соответствующем определении этого последнего термина «наименьшая ошибка» вполне можно было бы найти  $\varphi$ -функции. С другой стороны, на практике такая процедура была бы весьма сложной. Поэтому мы попытаемся выбирать соответствующую систему простых уравнений, обрезанных тем же способом, что и набор  $\varphi$ -функций, а другие уравнения рассматривать не будем. Однако эту процедуру следует использовать осторожно, тщательно исследуя получаемую таким путем степень приближения.

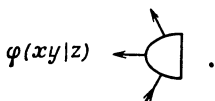
#### § 4. Описание интегральных уравнений с помощью фейнмановских диаграмм

Интегральные уравнения, которые возникают в методе Тамма — Данкова путем комбинирования уравнений (4.2), (4.9) и (4.14), представить с помощью фейнмановских диаграмм [93] можно следующим образом. Коэффициенты линейных уравнений задаются всегда комбинациями из двух функций:  $F(xy)$  и  $G(xy)$ ; удобно поэтому изображать эти функции линиями, идущими из точки  $x$  в точку  $y$ . Мы будем применять следующие обозначения:

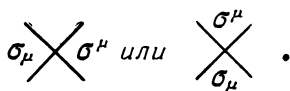
$$\begin{array}{c}
 G(xy) \quad | \\
 \\
 F(xy) \quad \circ
 \end{array}
 \quad , \quad (4.19)$$



Если между  $\chi(x)$  и  $\chi^*(x)$  необходимо провести различие, то его можно указать направлением стрелки на соответствующей линии



Наконец, диаграммы будут содержать вершины, в которых сходятся, как можно видеть из (4.9), четыре линии. В указанном уравнении вершинной точкой является  $x'$ . Одной из четырех сходящихся линий с необходимостью является  $G$ -линия, а другие могут быть  $F$ - или  $G$ -линиями или могут изображать переменные  $\varphi$ -функции. Так как все вершины возникают из одного и того же члена взаимодействия фундаментального уравнения, то они определяют одну и ту же связь дираковских и изоспиновых индексов. Если это необходимо, то можно указать дираковские или изоспиновые матрицы, записывая их в углу двух соединяющихся в вершине линий; например,



По всем вершинным точкам (и только по ним) следует интегрировать.

Рассмотрим в качестве примера уравнение на собственные значения для бозонного состояния  $|B\rangle$  в низшем приближении, в котором будут отбрасываться все  $\varphi$ -функции с числом переменных, большим двух. Из (4.2), (4.9) и (4.12) получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \chi^*(x) \sigma_\mu \chi(x) | B \rangle &= -l^2 \int d^4 x' \langle 0 | T \chi^*(x) \times \\ &\times \sigma_\mu G(x x') \sigma^\nu : \chi(x') (\chi^*(x') \sigma_\nu \chi(x')) : | B \rangle \approx \\ &\approx -l^2 \int d^4 x' \text{Sp}(\sigma_\mu G(x x') \sigma^\nu F(x' x)) \times \\ &\times \langle 0 | T \chi^*(x') \sigma_\nu \chi(x) | B \rangle. \end{aligned} \quad (4.21)$$



(Знак  $\text{Sp}$  означает взятие «следа» по дираковским индексам.) Это интегральное уравнение через фейнмановские диаграммы будет выражаться следующим образом:

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \quad (4.22a)$$

Diagram 1: A semi-circular loop with a vertex on the right, labeled  $\sigma_\mu$ .

Diagram 2: A figure-eight loop with a vertex on the right, labeled  $\sigma_\mu$  and  $\sigma_\nu$  on the left loop, and  $\sigma^\nu$  on the right loop.

или просто как

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} \quad (4.226)$$

Diagram 3: A semi-circular loop with a vertex on the right.

Diagram 4: A figure-eight loop with a vertex on the right.

Оно является конкретизацией более общего уравнения

$$\text{Diagram 5} = \text{Diagram 6} \quad .$$

Diagram 5: A semi-circular loop with a vertex on the right and two external lines on the left.

Diagram 6: A figure-eight loop with a vertex on the right and two external lines on the left.

Ядро интегрального уравнения можно записать в виде

$$\text{Sp} [\sigma_\mu l^2 G(x x') \sigma^\nu F(x' x)] + \dots = \text{Diagram 7} \quad (4.23)$$

Diagram 7: A semi-circular loop with a vertex on the right.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение на собственные значения для фермионов в приближении, в котором отбрасываются все  $\phi$ -функции с числом переменных, большим трех. Два соотношения между  $\phi$ -функциями одной или трех переменных символически можно представить как

$$\begin{aligned} \text{Diagram 8} &= \text{Diagram 9} = \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} , \\ \text{Diagram 12} &= \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} - \text{Diagram 15} , \end{aligned}$$

Diagram 8: A semi-circular loop with a vertex on the right and one external line on the left.

Diagram 9: A semi-circular loop with a vertex on the right and two external lines on the left.

Diagram 10: A figure-eight loop with a vertex on the right and two external lines on the left.

Diagram 11: A figure-eight loop with a vertex on the right and two external lines on the left, with a dot on the top line.

Diagram 12: A semi-circular loop with a vertex on the right and two external lines on the left.

Diagram 13: A semi-circular loop with a vertex on the right and two external lines on the left, with a dot on the bottom line.

Diagram 14: A figure-eight loop with a vertex on the right and two external lines on the left.

Diagram 15: A semi-circular loop with a vertex on the right and one external line on the left, with a dot on the line.

В этом случае выписывать явно все интегрирования, как это сделано в (4.21), было бы уже очень сложно, так что фейнмановские диаграммы являются удобным методом описания общей структуры уравнений.

### § 5. Нелинейные задачи; $\eta$ -функции и $S$ -матрица

Для представления самого основного состояния набор  $\phi$ -функций не очень удобен; в этом случае функция  $\phi(x|y)$ , как видно из определения, исчезает. Наилучшим представлением являются  $\tau$ -функции, тождественные двухточечным, четырехточечным и т. д. функциям. Если для приближения основного состояния использовать усеченный набор функций, то лучше всего выбирать, по видимому, набор  $\eta$ -функций (4.3) и (4.4), так как своим происхождением  $\eta$ -функция от  $2n$  переменных в основном обязана рождению и уничтожению состояний, которые можно представить не менее чем  $n$  переменными. Если  $n$  велико, этот вклад будет сравнительно несущественным.

Так как сами (4.3) и (4.4) дают нелинейные соотношения между  $\eta$ -функциями, то и уравнения для них, получаемые из (4.9), будут нелинейными. Первые два уравнения возникающей бесконечной системы можно изобразить с помощью фейнмановских диаграмм следующим образом:

$$\text{---} \circ \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \eta \text{---} \text{---} \text{---} , \quad (4.25)$$

$$\text{---} \eta \text{---} = \text{---} \text{---} \eta \text{---} + \text{---} \eta \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} . \quad (4.26)$$

Если в качестве первого приближения в (4.26) пренебречь членом с  $\eta$ -функцией шести переменных, то

$$\text{---} \eta \text{---} \approx \text{---} \eta \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} . \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.25), получаем

$$\begin{aligned}
 \text{---} \circ \text{---} \approx & \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \text{---} + \text{---} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} + \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \text{---} + \\
 & + \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} + \\
 & + \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} .
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Это последнее уравнение действительно имеет форму (4.18), которую мы потребовали в процессе общего рассмотрения. Операторы  $\mathcal{L}(xx')$  или  $\mathcal{L}(p^2)$  и  $\mathcal{M}(xx')$  или  $\mathcal{M}(p^2)$  изображаются здесь так:

$$\mathcal{L} = \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \text{---} + \text{---} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} ,
 \tag{4.29}$$

$$\mathcal{M} = \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \text{---} + \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} + \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} .
 \tag{4.30}$$

Если бы в интегральных операторах функции  $\text{---} \circ \text{---} = F(xy)$  и  $\left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \end{array} \right)$  можно было считать фиксированными, то мы могли бы рассматривать (4.28) как неоднородное линейное уравнение относительно  $\text{---} \circ \text{---}$ . В этом случае соответствующее однородное уравнение имело бы вид

$$\text{---} \text{---} \text{---} = \left[ \text{---} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \text{---} + \text{---} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \eta \\ \text{---} \end{array} \right) \text{---} \right] \text{---} \text{---} \text{---} ,
 \tag{4.31}$$

где  $\text{---}\bigcirc\text{---}$  можно построить посредством рождения и уничтожения фермионов:

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---}\bigcirc\text{---} \cdot \quad (4.32)$$

«Однородное» уравнение (4.31) на самом деле эквивалентно уравнению на собственные значения для фермионов и определяет положение полюсов; позже оно будет использоваться (в несколько упрощенной форме) для вычисления фермионных собственных значений. «Неоднородное» уравнение (4.28) определяло бы вычеты в полюсах и полное поведение  $\text{---}\bigcirc\text{---}$ .

С другой стороны,  $\text{---}\bigcirc\text{---}$  и  $\bigcirc\eta$ , входящие в интегральные операторы (4.29) и (4.30), нельзя считать фиксированными. Выражение (4.28) как раз является очень сложным нелинейным интегральным уравнением для  $\text{---}\bigcirc\text{---}$  и  $\bigcirc\eta$ , и вряд ли для решения уравнений такого типа можно отыскать какую-либо общую процедуру.

С практической точки зрения единственным способом что-нибудь сделать с такими уравнениями, как (4.28), будет параметризация  $\text{---}\bigcirc\text{---}$ . В дальнейших расчетах для этого будет применена общая форма (3.37). Массовый спектр мы упростим, предполагая наличие лишь нескольких дискретных масс, которые должны совпадать с собственными значениями (3.31) (постулат самосогласованности); вычеты в полюсах должны определяться условием того, чтобы (4.28) выполнялось с максимальной возможной точностью. При расчетах, проводимых в этой книге, рассматривается лишь простейший случай одной массы, и  $\text{---}\bigcirc\text{---}$  представляется формулой (3.39). Тогда значение массы  $k$ , входящей в (3.39), должно лежать в окрестности низшего собственного значения уравнения (4.31).

Аналогично уравнению (4.28), (4.27) можно рассматривать как неоднородное линейное уравнение, которое (если  $\text{---}\bigcirc\text{---}$  считается фиксированной) может быть использовано для вычисления бозонных собственных зна-

чений и соответствующих вычетов в  $\textcircled{\eta}$ . Однородное линейное уравнение, которое соответствует (4.27), имеет вид

$$\begin{array}{c} \text{D} \end{array} = \begin{array}{c} \text{D} \\ \text{D} \end{array} \quad c \quad \textcircled{\eta} \approx \begin{array}{c} \text{D} \\ \text{D} \end{array} + \dots \quad (4.33)$$


Оно упоминалось выше как основа для определения бозонных собственных значений. Практически это уравнение будет использоваться в виде

$$\begin{array}{c} \text{D} \\ \text{D} \end{array} = \begin{array}{c} \text{D} \\ \text{D} \end{array} \quad , \quad (4.34)$$

уже встречавшемся раньше [формула (4.22)].

Вакуумные  $\tau$ -функции,  $2n$ -точечные функции или  $\eta$ -функции тесно связаны с  $S$ -матрицей. Если некоторые из временных переменных  $2n$ -точечной функции устремить к  $+\infty$ , а другие — к  $-\infty$ , то ее асимптотическое поведение будет определять элементы  $S$ -матрицы. Действительно, комбинации типа (2.14), составленные из полевых операторов, можно использовать для определения операторов  $O_\lambda(x)$ , которые имеют заданную симметрию; если построенная из этих операторов  $O_\lambda(x)$  двухточечная функция (2.15) содержит полюса, то вакуумные  $\tau$ -функции будут иметь, как правило, такие же полюса, а операторы  $O_\lambda(t \rightarrow -\infty)$  будут включать соответствующий оператор свободного поля  $\psi_{in}$  [или  $O_\lambda(t \rightarrow +\infty)$  — оператор  $\psi_{out}$ ]. Тогда асимптотическое поведение  $2n$ -точечной функции определит  $S$ -матричный элемент посредством соотношения (2.13). К одному и тому же  $S$ -матричному элементу может приводить множество различных  $\tau$ -функций, в которые входят операторы  $O_\lambda$  с одинаковыми свойствами симметрии. Таким образом, полное определение  $\tau$ - или  $\eta$ -функций основного состояния эквивалентно полному определению  $S$ -матрицы.

Здесь следует отметить, что  $\tau$ - и  $\eta$ -функции и их асимптотические части содержат вклады от нефизических состояний, связанных с индефинитностью метрики гильбертова пространства. Согласно § 5 гл. 2, физические состояния из асимптотической части можно выделить путем диагонализации  $S$ -матрицы и выбора таких состояний, для которых диагональные элементы по абсолютной величине равны единице. Возможно, что при таком процессе в теорию вводятся некоторые элементы нелокальности (подобно кулоновским силам в квантовой электродинамике).

В качестве практического примера с помощью  $\eta$ -функции  можно рассчитать рассеяние двух фермионов. В приближении (4.27) его амплитуда может быть определена путем формального интегрирования этого уравнения [103]:

$$\text{Diagram } \eta = \text{Diagram with horizontal line and loop} \quad (4.35)$$

The diagram on the left is a circle with the Greek letter  $\eta$  inside and four external lines. The diagram on the right is a horizontal line with a loop below it, labeled with '1' above and '1-' below. It has four external lines: two on the left and two on the right.

Действительно, подстановка (4.35) в (4.27) дает

$$\begin{aligned} & \text{Diagram } \eta - \text{Diagram with loop and } \eta \text{ blob} = \\ & = \text{Diagram with loop and } \eta \text{ blob} - \text{Diagram with loop and } \eta \text{ blob} = \\ & = \text{Diagram with loop and } \eta \text{ blob} = \text{Diagram with crossing lines} \cdot \quad (4.36) \end{aligned}$$

The first diagram is  $\eta$  minus a diagram with a loop and an  $\eta$  blob. The second diagram is a diagram with a loop and an  $\eta$  blob minus another similar diagram. The third diagram is a diagram with a loop and an  $\eta$  blob. The fourth diagram is a diagram with crossing lines.

Можно считать, что четыре выходящие линии представляют приходящие и уходящие частицы. Одна из них является не  $F(xy)$ -линией  $-\circ-$ , как это должно быть, а  $G$ -линией; это является следствием грубости приближения, которое не может полностью учесть то, что фер-

мионные линии должны быть одетыми. Связующий член  $1/(1 - \text{символ})$  подобен рассеивающей силе, действующей между фермионами. Его полюса определяются уравнением  $1 = \text{символ}$ , которое является ни чем иным, как уравнением на собственные значения для бозонов. Вычеты в полюсах можно использовать для вычисления констант связи бозонов с фермионами; некоторые примеры такого расчета будут приведены в гл. 6 и 8.

Описанные здесь приемы определения  $\eta$ -функций тесно связаны с современными методами, применяющимися в квантовой механике многих тел. Большинство результатов, полученных там, можно перенести без особых изменений и в релятивистскую теорию поля. Единственное глубокое различие состоит в том, что физика многих тел отправляется от канонического квантования и существования дальнедействующих сил, в то время как релятивистская теория поля исходит из локального взаимодействия и вследствие этого неканонического квантования. Во всех задачах, где это различие не существенно, методы физики многих тел можно перенести в релятивистскую теорию поля.

Следует добавить одно замечание, касающееся однородных линейных уравнений, которые определяют собственные значения. Если в процессе исследования вакуумных  $\eta$ -функций возникает некоторая информация, относящаяся не только к двухточечной функции, но и к  $\eta$ -функциям четырех (или даже большего числа) переменных, то ее можно использовать для уточнения системы линейных уравнений. В этом случае за приближенное представление состояния удобно принимать усеченный набор  $\zeta$ -функций [ср. (4.5)];  $\eta$ -функции (или то, что о них известно) можно применить для того, чтобы связать  $\zeta$ -функции с  $\tau$ -функциями и тем самым построить для них линейные интегральные уравнения.

Такая полная математическая схема состоятельна лишь в том случае, если разные методы, которые используют усеченные наборы  $\phi$ -,  $\eta$ - или  $\zeta$ -функций, при стремлении числа переменных к бесконечности сходятся к одному и тому же пределу. При теперешнем состоянии квантовой теории поля доказательства такой сходимости дать

нельзя. Возможно, что сходимость зависит от того, как именно выбирается усеченная система уравнений: например, составляем ли мы столько же уравнений, сколько и неизвестных функций, или берем большее число уравнений, чтобы удовлетворить им с наименьшей возможной ошибкой. Действительно, простой пример ангармонического осциллятора как раз и показывает нам, что сходимость может зависеть от таких деталей. Тем не менее существует надежда, что при соответствующем выборе уравнений для различных усеченных наборов функций возникнет некоторая сходящаяся схема, которую можно рассматривать как непротиворечивое решение полевого уравнения (3.1).



## РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

### § 1. Низшие бозонные состояния <sup>1)</sup>

Простейшие бозоны  $|B\rangle$  можно описать с помощью  $\varphi$ - или  $\tau$ -функций типа

$$\varphi_\mu(x|x) = \tau_\mu(x|x) = \langle 0|T\chi^*(x)\sigma_\mu\chi(x)|B\rangle. \quad (5.1)$$

Бозоны этой группы можно рассматривать состоящими из фермиона и антифермиона, которые находятся в  $S$ -состоянии (орбитальный момент равен нулю). В зависимости от того, параллельны или антипараллельны спины двух фермионов, спин бозона может равняться нулю или единице. В первом случае 4-вектор  $\varphi_\mu$  по направлению должен совпадать с вектором энергии-импульса  $J_\mu$  бозона. Во втором случае его направление задается вектором поляризации  $B_\mu$ , который удовлетворяет условию

$$B_\mu J^\mu = 0. \quad (5.2)$$

В феноменологической теории в первом случае  $\varphi_\mu(x|x)$  соответствует производной скалярной волновой функции бозона по  $x_\mu$ . В случае же спина 1  $\varphi_\mu(x|x)$  можно сравнивать с векторным потенциалом  $A_\mu(x)$ , который удовлетворяет условию Лоренца

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (5.3)$$

Тогда соотношения (5.2) и (5.3) эквивалентны. Точно таким же способом можно фиксировать и изоспин бозона. Если, по определению,

$$\varphi_{\mu\nu}(x|x) = \langle 0|T\chi^*(x)\sigma_\mu\tau_\nu\chi(x)|B\rangle, \quad (5.4)$$

а

$$\tau_\nu = (1, \boldsymbol{\tau}) \quad (5.5)$$

<sup>1)</sup> См. работу [104].

суть изоспиновые матрицы, то  $\varphi_{\mu,0}$  описывает бозоны изоспина 0, а  $\varphi_{\mu,i}$  или  $\varphi_{\mu,i}P_i$  ( $P_i$  — вектор поляризации в изопространстве) — бозоны изоспина 1.

Мы составим уравнение на собственные значения в низшем приближении, в котором будем пренебрегать всеми  $\varphi$ -функциями с числом переменных, большим двух. Собственные функции можно получить из уравнения


$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2},$$

а уравнение на собственные значения запишется через фейнмановские диаграммы следующим образом:

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} \cdot \quad (5.6)$$

Это простейшее выражение уже упоминалось в (4.21). Для точных оценок удобно воспользоваться эквивалентностью двух форм фундаментального уравнения [(3.1) и (3.4)] и заменить в члене взаимодействия произведение двух единичных матриц, действующих в изопространстве, на его фирцевски симметричный вариант:

$$1 \cdot 1 \rightarrow \frac{3}{4} 1 \cdot 1 + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k. \quad (5.7)$$

Эта замена упрощает процедуру «свертки», т. е. редукции  $\tau$ -функции четырех переменных к  $\varphi$ -функции двух переменных посредством соотношения (4.2). Кроме того, ядро  нужно симметризовать по двум переменным, входящим в функцию  $\varphi_{\mu}(x|x)$ :

$$\text{Diagram 5} \rightarrow \frac{1}{2} \left[ \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} \right]. \quad (5.8)$$

Это необходимо для того, чтобы в данном приближении сохранялась  $PG$ -инвариантность фундаментального уравнения. В нашем специальном случае (5.6) ядро уже симметрично. Идеальным методом выбора уравнений для усеченного набора  $\varphi$ -функций было бы постулирование всей бесконечной системы с наименьшей возможной

ошибкой, но в практических вычислениях такой метод едва ли применим. Однако при выборе конкретных уравнений нужно тщательно избегать по крайней мере нарушения симметрий, присущих исходному полевому уравнению.

После этих предварительных замечаний полное ядро уравнения на собственные значения для функции  $\varphi_\mu(x|x)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{O} &= K_{\mu\nu}(xx') = -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[ 2\sigma_\mu l^2 G(xx') \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( \frac{3}{4} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k \right) \sigma_\nu F(x'x) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ 2\sigma_\mu F(xx') \left( \frac{3}{4} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k \right) \sigma_\nu l^2 G(x'x) \right], \quad (5.9) \end{aligned}$$

причем шпур берется лишь по дираковским индексам. Коэффициенты 2 в скобках возникают от двух видов «свертки». Для  $F(xx')$  мы используем приближение (3.39), зависящее лишь от одного параметра  $\kappa$ ;  $G(xx')$  — функция Грина (4.8). Из (5.9), (3.39) и (4.8) получим

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}(xx') &= \left( \frac{3}{4} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k \right) (2\pi)^{-8} l^2 \times \\ &\quad \times \int d^4 p d^4 q e^{-i(p-q)(x-x')} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\text{Sp}(\sigma_\mu p_\rho \bar{\sigma}^{\rho} \sigma_\nu q_\tau \bar{\sigma}^{\tau})}{p^2 (q^2)^2 (q^2 - \kappa^2)} + \frac{\text{Sp}(\sigma_\mu p_\rho \bar{\sigma}^{\rho} \sigma_\nu q_\tau \bar{\sigma}^{\tau})}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2) q^2} \right] \quad (5.10) \end{aligned}$$

Совершим преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}(J) &= \int d^4 x K_{\mu\nu}(x-x') e^{+iJ(x-x')} = \\ &= -\left( \frac{3}{4} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k \right) (2\pi)^{-4} l^2 i \int d^4 p \kappa^4 \times \\ &\quad \times \text{Sp}[\sigma_\mu p_\rho \bar{\sigma}^{\rho} \sigma_\nu (J-p)_\tau \bar{\sigma}^{\tau}] \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2) (J-p)^2} + \frac{1}{[(J-p)^2]^2 [(J-p)^2 - \kappa^2] p^2} \right] = \\ &= -\left( \frac{3}{4} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k \right) \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^4 l^2 i \int d^4 p \cdot 2 \times \\ &\quad \times [-g_{\mu\nu}(p, J-p) + p_\mu (J-p)_\nu + p_\nu (J-p)_\mu] \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2) (J-p)^2} + \frac{1}{[(J-p)^2]^2 [(J-p)^2 - \kappa^2] p^2} \right]. \quad (5.11) \end{aligned}$$

При интегрировании в импульсном пространстве нужно задать контур интегрирования в комплексной  $p_0$ -плоскости. Поскольку  $F(xy)$  определяется как вакуумное среднее хронологического произведения, а функция Грина  $G(xy)$  вследствие граничных условий имеет тот же смысл, то, согласно хорошо известному правилу, можно интегрировать вдоль действительной  $p_0$ -оси, если каждый полюсный член типа  $1/(-p^2 + \kappa^2)$  заменить на  $\lim_{\delta \rightarrow 0} [1/(-p^2 + \kappa^2 - i\delta)]$ . Если оставшиеся сингулярности

не требуют дополнительного обсуждения граничных условий, то интегрирование по  $p_1, p_2, p_3$  можно выполнять вдоль действительных осей. На самом деле, когда интегрирование по  $p_0$  проведено, остается сингулярность в  $\mathbf{p}$ -пространстве; в специальной системе координат, в которой бозон покоится, т. е.  $J_\mu = (J_0, 0, 0, 0)$ , она локализована в точке  $|\mathbf{p}| = 1/2 J_0$ . Эта сингулярность тесно связана с предположением о наличии в приближенной двухточечной функции дипольного состояния и будет подробно рассмотрена в § 2. Пока мы удовлетворимся соглашением, что в полюсе  $1/(J_0 - 2|\mathbf{p}|)$  берется главное значение интеграла. При этих условиях интегрирование в выражении (5.11) можно выполнить сравнительно просто, если применить методы, развитые Фейнманом (подробности вычислений изложены в приложении III). Результат таков:

$$K_{\mu\nu}(J) = -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{4} \tau_k \tau_k \right) \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2 \times \\ \times \left[ \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} q_0(\lambda) + \left( g_{\mu\nu} - \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} \right) q_1(\lambda) \right], \quad (5.12)$$

где  $\lambda = J^2/\kappa^2 = \kappa_B^2/\kappa^2$  ( $\kappa_B$  — масса бозона), а

$$q_0(\lambda) = \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2} \ln |1-\lambda|, \quad (5.13)$$

$$q_1(\lambda) = \left( 1 - \frac{2}{3} \lambda \right) \ln \lambda + \frac{2}{3} + \frac{1}{3\lambda} + \frac{(1-\lambda)^2(1+2\lambda)}{3\lambda^2} \ln |1-\lambda|. \quad (5.14)$$

Прежде чем переходить к численному анализу, необходимо отметить, что выражения  $1/2 \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}$  и  $1/2 \tau_k \tau_k$  являются проекционными операторами в изопростран-

стве, а  $J_\mu J_\nu / J^2$  и  $g_{\mu\nu} - (J_\mu J_\nu) / J^2$  — проекционными операторами в обычном спиновом пространстве. Это можно видеть следующим образом. Состояние изоспина 0 характеризуется  $\varphi$ -функцией, которая в изопространстве имеет вид  $1_{\alpha\beta}$ . Для этой  $\varphi$ -функции имеем

$$1_{\alpha\beta} \cdot \left( \frac{1}{2} 1_{\alpha\beta} \cdot 1_{\gamma\delta} \right) = 1_{\gamma\delta} \cdot 1_{\alpha\beta} \cdot \left( \frac{1}{2} \tau_{\beta\alpha}^k \cdot \tau_{\gamma\delta}^k \right) = 0. \quad (5.15)$$

Для  $\varphi$ -функции изоспина 1, например  $\tau_{\alpha\beta}^l$ , будем иметь

$$\tau_{\alpha\beta}^l \left( \frac{1}{2} 1_{\beta\alpha} \cdot 1_{\gamma\delta} \right) = 0, \quad \tau_{\alpha\beta}^l \left( \frac{1}{2} \tau_{\beta\alpha}^k \cdot \tau_{\gamma\delta}^k \right) = \tau_{\gamma\delta}^l. \quad (5.16)$$

Поэтому  $1/2 \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}$  является проекционным оператором для изоспина 0, а  $1/2 \tau_h \cdot \tau_h$  — проекционным оператором для изоспина 1. Что касается дираковского спина, то, как мы уже упоминали, для спина 0 вектор  $\varphi_\mu$  параллелен  $J_\mu$ , а для спина 1 он параллелен  $B_\mu$  ( $B_\mu J^\mu = 0$ ). В первом случае имеем

$$J^\mu \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} = J_\nu, \quad J^\mu \left( g_{\mu\nu} - \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} \right) = 0; \quad (5.17)$$

во втором случае

$$B^\mu \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} = 0, \quad B^\mu \left( g_{\mu\nu} - \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} \right) = B_\nu. \quad (5.18)$$

Поэтому  $J_\mu J_\nu / J^2$  является проекционным оператором для обычного спина 0, а  $g_{\mu\nu} - J_\mu J_\nu / J^2$  — проекционным оператором для спина 1.

Этот результат сразу же дает нам возможность записать уравнения на собственные значения для четырех простейших случаев: дираковский спин  $S=0$ , 1 и изоспин  $T=0$ , 1.

$$S=0 \quad T=0 \quad 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2 q_0(\lambda) = 0, \quad (5.19)$$

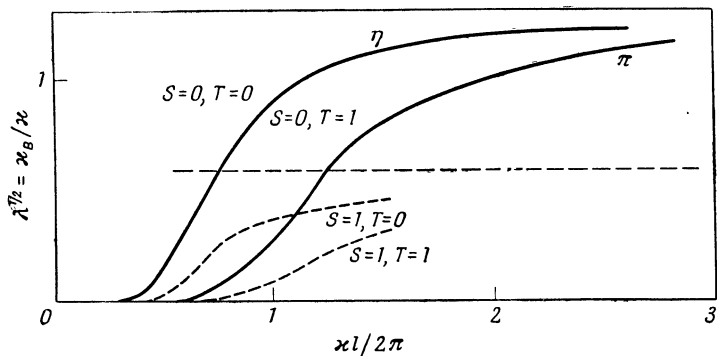
$$T=1 \quad 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2 q_0(\lambda) = 0, \quad (5.20)$$

$$S=1 \quad T=0 \quad 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2 q_1(\lambda) = 0, \quad (5.21)$$

$$T=1 \quad 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2 q_1(\lambda) = 0. \quad (5.22)$$

Собственные значения возникают как функции параметра  $\kappa$ , входящего в двухточечную функцию; численные значения для  $\lambda^{1/2} = (|J|/\kappa) = (\kappa_B/\kappa)$  ( $\kappa_B$  — масса бозона) можно видеть на фиг. 3.

Решения со спином 0 описывают частицы, которые экспериментально известны как  $\eta$ - и  $\pi$ -мезоны. Для значений  $\kappa l/2\pi$ , заключенных между 0,8 и 1,0, отношение



Фиг. 3.

масс  $\eta$ - и  $\pi$ -мезонов примерно согласуется с экспериментальной величиной; далее, если в низшем приближении отождествить  $\kappa$  с массой нуклона, то отношение к ней бозонных масс снова будет качественно согласовываться с наблюдаемыми величинами. В действительности  $\eta$ -мезон был предсказан (в 1958 г.) из уравнения (5.19) [59]. Следует подчеркнуть, что величина  $\kappa l/2\pi$  не является свободным параметром. Она будет определяться из постулата (как это было указано в § 5 гл. 4), что типичный полюс  $p^2 - \kappa^2 = 0$ , имеющийся в двухточечной функции, согласуется с собственным значением, которое получается из фермионного уравнения. Теория не содержит никаких свободных параметров. Практически величина  $\kappa l/2\pi$ , вычисленная в низшем приближении с помощью этого метода, лежит в области от 0,8 до 1,05; эта проблема будет обсуждаться в § 3 и 4 настоящей главы и в гл. 7.

Казалось бы, что два других собственных значения, со спином 1, по своим свойствам симметрии соответ-

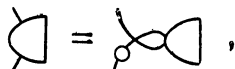
ствуют частицам, подобным  $\omega$ - и  $\rho$ -мезонам. Это справедливо, но только с одним исключением. Когда в процессе дальнейших вычислений будет обсуждаться норма бозонных состояний, то окажется, что норма двух состояний с  $S=0$  положительна, в то время как норма двух других состояний, с  $S=1$ , отрицательна. Следовательно, при наличии граничных условий, кратко обсуждавшихся в § 4 гл. 3, среди выходящих волн состояния с  $S=1$  появиться не могут (они «не могут рождаться»), в то время как состояния с  $S=0$  могут появиться. Поэтому нельзя отождествить собственные значения, определяемые уравнениями (5.21) и (5.22), с существующими векторными мезонами; в определенном смысле они являются «призрачными» частицами, которые не появляются в качестве реальных. Более ясно это можно увидеть, изучая сингулярность волновой функции бозонов в точке  $|\mathbf{p}| = J_0/2$ .

## § 2. Сингулярность бозонной волновой функции в импульсном пространстве

Основная часть бозонной волновой функции

$$\varphi_\mu(x|y) = \langle 0 | T \chi^*(x) \sigma_\mu \chi(y) | B \rangle, \quad (5.23)$$

вычисленная в первом приближении из диаграммы



может быть переписана в виде

$$\varphi_\mu(x|y) = e^{iJy} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \times \\ \times \frac{-g_{\mu\nu}(p, J-p) + p_\mu(J-p)_\nu + p_\nu(J-p)_\mu}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2) (J-p)^2} \varphi^\nu(0|0). \quad (5.24)$$

Если полюса типа  $1/p^2$  понимаются как предельные величины  $1/(p^2 + i\delta)$ , то интегрирование по  $p_0$  будет проводиться вдоль вещественной оси. Мы будем рассматривать поведение волновой функции  $\varphi(x|y)$  при  $x_0 - y_0 = 0$ ,

предполагая, что  $J_\mu = (J_0, 0, 0, 0)$ . Тогда интегрирование по  $p_0$  можно выполнить, замыкая контур, который идет вдоль действительной оси из  $-\infty$  в  $+\infty$ , в области больших положительных или больших отрицательных мнимых значений и оставляя лишь интеграции вокруг полюсов, лежащих по обе стороны в окрестности ( $\sim \delta$ ) действительной оси. Интегрирование даст конечный результат даже в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ , если только контур не проходит между двумя полюсами, которые при  $\delta \rightarrow 0$  совпадают. Такая ситуация имеет место для значения  $|\mathbf{p}| = J_0/2$ , при котором совпадают двойной полюс в точке  $p_0 = \sqrt{|\mathbf{p}^2| - i\delta}$ , возникающий из  $(p^2)^2 = 0$ , и простой полюс в точке  $p_0 = J_0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 - i\delta}$ , появляющийся из  $(J - p)^2 = 0$ . Если при  $J_0 - 2|\mathbf{p}| = 0$  числитель (5.24) не исчезает, то после интегрирования остается двойной полюс вида  $(J_0 - 2|\mathbf{p}|)^{-2}$ .

Этот математический результат можно интерпретировать, если заметить, что введение в приближенную двухточечную функцию призрачных и дипольных состояний (3.48) нулевой массы обязано (по крайней мере формально) приводить к процессам, в которых бозон может распадаться на фермион-антифермионную пару того же типа. Поэтому мы ожидаем, что из центра бозона исходит сферическая волна, соответствующая фермиону и антифермиону, которые покидают бозонное состояние в противоположных направлениях.

Дальнейший анализ приводит к различным результатам для состояний с  $S=0$  и  $S=1$ . Для состояний с  $S=0$  функция  $\varphi^v(0|0)$  пропорциональна  $J^\nu$ , и поэтому числитель в (5.24) имеет вид

$$\begin{aligned} -J_\mu(p, J - p) + (J - 2p)_\mu(pJ) + p_\mu J^2 = \\ = J_\mu p^2 + p_\mu(J^2 - 2pJ). \end{aligned} \quad (5.25)$$


Это выражение в точке  $|\mathbf{p}| = J_0/2 = p_0$  исчезает. Тогда после интегрирования по  $p_0$  будет оставаться лишь простой полюс вида  $(J_0 - 2|\mathbf{p}|)^{-1}$ . После того как выполнено интегрирование по  $\mathbf{p}$ , этот полюс будет создавать сферическую волну общего типа  $r^{-1} \exp[\pm i(J_0/2)r]$  (где  $\mathbf{r} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ). При больших расстояниях  $r$ , т. е. когда фермион и антифермион находятся очень далеко друг



от друга, для каждой частицы мы получим приблизительно плоские волны [по крайней мере для одной из частиц — из-за наличия  $G$ -линии в правой части (5.24)], удовлетворяющие уравнению Вейля  $p_\nu \sigma^\nu \varphi = 0$ . Поэтому в согласии с постулированными граничными условиями асимптотически существует лишь состояние  $G^+$ , входящее в (3.48). Оно имеет нулевую норму; поэтому сферическая волна  $r^{-1} \exp[\pm i(J_0/2)r]$  не нарушает конечность нормы бозонного состояния. Тем самым, так как асимптотическое поведение бозонных состояний с  $S=0$  не противоречит граничному условию, согласно которому среди фермионов нулевой массы асимптотически должны присутствовать лишь  $G^+$ , эти состояния могут появляться в качестве приходящих и уходящих частиц.

Однако для состояний с  $S=1$  ситуация другая. Здесь  $\varphi^\nu(x|x)$  пропорциональна  $B^\nu$  и числитель (5.24) превращается в

$$-B_\nu(p, J-p) + (Bp)(J-2p)_\nu. \quad (5.26)$$

Вообще говоря, в точке  $|\mathbf{p}| = J_0/2 = p_0$  это выражение не исчезает. Поэтому после интегрирования по  $p_0$  возникает двойной полюс вида  $(J_0 - 2|\mathbf{p}|)^{-2}$ ; он соответствует сферической волне типа  $r^{-1}(a+br) \exp[\pm i(J_0/2)r]$ . Это означает, что асимптотически (при больших  $r$ ) будут появляться не только состояния  $G^+$ , но и дипольные состояния  $D^+$  в противоречии с предполагаемыми граничными условиями. Поэтому бозонные состояния (5.21) и (5.22) с  $S=1$  не могут появляться в качестве уходящих или приходящих частиц, т. е. «свободных» состояний; они не могут соответствовать никаким наблюдаемым векторным мезонам. Теория реальных векторных мезонов (кроме фотона, который будет рассматриваться в гл. 8) требует учета высших приближений, в которых контактное взаимодействие, описываемое диаграммой , решающей роли не играет.

Возвращаясь к бозонам с  $S=0$ , отметим, что сферическая волна типа  $r^{-1} \exp(\pm irJ_0/2)$  или в более явном виде

$$\frac{a \cos(rJ_0/2) + b \sin(rJ_0/2)}{r}$$

будет появляться для любого значения  $J_0$  и что при заданном  $J_0$  условие




фиксирует лишь соотношение между константами  $a$  и  $b$ . Однако решение, содержащее член  $r^{-1} \sin(rJ_0/2)$ , означало бы состояние рассеяния, в котором прозрачная волна  $G^+$ -типа рассеивалась бы антифермионом. Решения, в которых рассеиваются конечные волновые пакеты  $G^+$ -типа, могут существовать при любом значении  $J_0$ , но они имеют нулевую норму и поэтому не соответствуют никакому физическому состоянию. Следовательно, дискретное реальное бозонное состояние конечной нормы определяется условием  $b=0$ ; асимптотически будет появляться лишь волна  $r^{-1} \cos(rJ_0/2)$ . Это условие приводит к интегрированию по  $|\mathbf{p}|$  в смысле главного значения (как и было установлено в § 1 гл. 5) и тем самым фиксирует  $J_0$  или  $\kappa_B$ .

### § 3. Простейшие фермионные состояния

Интегральные операции, необходимые для вычисления собственных значений масс фермионных состояний [59, 60] в низшем приближении, описываются фейнмановскими диаграммами (4.24); в этом приближении пренебрегается всеми  $\varphi$ -функциями с числом переменных, большим трех. При дальнейших расчетах интегральные уравнения будут упрощаться также тем, что мы будем пренебрегать всеми вкладками в (4.24), кроме

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \quad (5.27)$$

Несомненно, что это приближение более примитивно, чем (4.24), и может быть даже менее точно, чем то, которое использовалось при расчете бозонов [уравнение (5.6)]; но оно имеет то преимущество, что превращает интегральное уравнение в алгебраическое (в импульсном

пространстве) и может оказаться достаточным для предварительной прикидки. Тем самым вычисление собственных значений масс сводится к оценке ядра  с помощью методов, развитых Фейнманом. Снова (аналогично случаю бозонов), если необходимо, ядро следует симметризовать по его переменным:

$$\text{Diagram} \rightarrow \frac{1}{3} \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right]. \quad (5.28)$$

The diagram on the left is a circle with two external lines on the left and right, and two internal lines forming a loop at the top and bottom. The three diagrams in the brackets are the same diagram with the two internal lines swapped in position: the first has the top line above the bottom line, the second has the bottom line above the top line, and the third has the two lines in the middle.

Но оно опять-таки симметрично уже заранее.

Когда с помощью фурье-преобразования ядро  $K(x-x')$  превращается в  $K(J)$ , то оно определяется как интеграл по двум импульсным переменным  $d^4pd^4q$ . Как и обычно, интегрирование по  $p_0$  и  $q_0$  будет проводиться по действительной оси (после того, как полюсные члены записаны в виде  $\lim_{\delta \rightarrow 0} [1/(p^2 + i\delta)]$  и т. д.). После интегрирования по  $p_0$  и  $q_0$  остающаяся функция импульсов сингулярна в тех точках, которые можно интерпретировать как приводящие к распаду начального фермиона на три фермиона нулевой массы. Поэтому опять, подобно случаю бозонов, будут возникать приходящие и уходящие сферические волны, зависящие, например, от расстояния между одним из фермионов и центром масс двух других. При этом случае появятся лишь волны нормального типа  $r^{-1} \exp(\pm ipr)$ , что можно увидеть из следующих качественных аргументов: при больших расстояниях  $|x-x'|$  функция  $F(xx')$  (3.39) убывает как  $1/|x-x'|$ ; в то же время  $G(x-x')$  убывает как  $|x-x'|^{-3}$ ; поэтому в бозонном случае интеграл  $\int d^4x' F(xx') G(x'y) \exp(ix'J)$  может содержать члены типа

$$\frac{1}{|x-y|} (a + b|x-y|) e^{\pm ip|x-y|}.$$

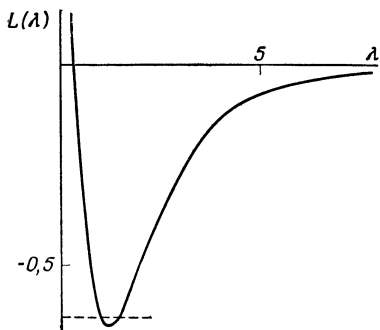
При этом интеграл

$$\int d^4x' F(xx') F(yx') G(zx') e^{ix'J}$$

асимптотически будет содержать лишь члены, подобные



$$\frac{1}{|z - (x + y)/2|} e^{\pm i\rho|z - (x + y)/2|}.$$

Поэтому существование свободных фермионов конечной массы совместно с граничным условием, утверждающим, что в качестве фермионов нулевой массы асимптотически будут появляться лишь состояния  $G^+$ .



Фиг. 4.

Нужно снова постулировать, что фермионные состояния не являются состояниями рассеяния  $G^+$ ; поэтому интегрирование в импульсном пространстве (после того как проведено интегрирование по  $p_0$  и  $q_0$ ) определяется в смысле главного значения. Тем самым фиксируется масса фермиона.

Реальное вычисление ядра  фейнмановскими методами является значительно более сложным, чем расчет диаграммы  в случае бозонов. В результате вычислений, которые полностью аналогичны (5.9) — (5.12), уравнение на собственные значения фермиона получается таким:

$$\left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^4 L(\lambda) \right] \sigma^v J_v \Phi(J) = 0, \quad (5.29)$$

где  $\lambda = + (J^2/\kappa^2) = (\kappa_P^2/\kappa^2)$ . Аналитическая функция  $L(\lambda)$  подробно обсуждается в приложении V. Ее поведение для действительных положительных значений  $\lambda$  указано на фиг. 4.

Уравнение (5.29) имеет несколько решений. Одно из них определяется условием  $\sigma_v J^v \varphi = 0$  или  $J^2 = 0$ , т. е. фермионом может быть нейтрино с нулевой массой. Если существуют значения  $\lambda$ , при которых скобка

$$\left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^4 L(\lambda) \right]$$

равна нулю, то возможны и конечные массы. Фиг. 4 показывает, что в этом случае, как правило, существуют два решения, которые определяются двумя пересечениями кривой  $L$  с прямой, параллельной оси абсцисс. Так как в высших приближениях состояние с большей массой может, по-видимому, распасться на более низкое состояние и пион, то к дискретному стационарному состоянию в конце концов будет приводить лишь низшее из двух значений  $\lambda$ . Поэтому естественно в качестве состояния, соответствующего стабильным барионам (спина  $1/2$  и изоспина  $1/2$ ), выбрать более низкое из двух состояний и постулировать, что его масса должна совпадать с массой  $\kappa$ , определяемой полюсом приближенной двухточечной функции (3.39). Это отождествление в очень грубом приближении решает нелинейную задачу, обсуждавшуюся в § 5 гл. 4.

В этом случае низшая точка пересечения должна лежать при  $\lambda = 1$ . Величина  $L(1)$  равна  $-0,6247$  и, следовательно,  $(\kappa l / 2\pi) = 1,02$ . С эмпирической точки зрения отношения между массами пиона,  $\eta$ -мезона и нуклона требуют в соответствии с § 1 несколько более низкого значения — около  $(\kappa l / 2\pi) \approx 0,9$ ; так как здесь мы имеем дело с низшим приближением, то это согласие следует считать вполне достаточным.

Если в этом приближении  $F(p)$  берется из (3.39), а  $\mathcal{L}(p^2)$ , входящая в нелинейное уравнение (4.18), отождествляется с  $-^{3/2}(\kappa l / 2\pi)^4 L(\lambda)$  из (5.29), то  $\mathcal{M}(p^2)$ , фигурирующая в (4.18), превращается в

$$\mathcal{M}(p^2) = \frac{i\kappa^3 [1 + ^{3/2}(\kappa l / 2\pi)^4 L(p^2/\kappa^2)]}{p^2 (-p^2 + \kappa^2)}. \quad (5.30)$$

Эта функция (которая в точке  $p^2 = \kappa^2$  не имеет полюса) не согласуется с правой частью уравнения (4.30), но

качественно может быть подобна ей. Рассматриваемое приближение (5.27) и (5.30) является более грубым, чем нелинейные уравнения (4.29) и (4.30).

#### § 4. Высшие приближения

Проблема высших приближений имеет два аспекта. Во-первых, можно интересоваться улучшением расчетов простейших собственных значений, основанных на уравнениях (5.19), (5.20) и (5.29). Во-вторых, существует множество собственных состояний, которые вообще нельзя получить с помощью приближений, принятых в § 1 или 3. На первый вопрос можно ответить, если показать хотя бы в принципе, что системы линейных интегральных уравнений, соответствующие высшим приближениям метода Тамма — Данкова, решаются с помощью обобщенного фредгольмовского формализма и что приближенные собственные значения будут сходиться к истинным (аналогично тому, что имеет место в случае ангармонического осциллятора). Если бы метод Тамма — Данкова (в рассматриваемой его форме) расходился, то, видимо, можно было бы отыскать другие усеченные наборы функций или другие системы линейных интегральных уравнений, которые приводят к сходящимся результатам. Но при теперешнем состоянии теории ввиду сложности высших приближений практически найти их нельзя. Поэтому с точки зрения приложений не так уж важно знать, сходится ли метод Тамма — Данкова или ему следует предпочесть другие методы: низшие приближения для многих различных вариантов расчета примерно тождественны, а высшие приближения до сих пор вычислить не удалось.

Единственный реальный способ улучшить уравнения на собственные значения (5.19), (5.20) и (5.29) — это добавить определенные члены, которые возникают из высших диаграмм и по математическим или физическим причинам должны быть чрезвычайно важны. Вряд ли такое добавление можно сформулировать в виде какой-то систематической схемы; но оно может оказаться полезным при объяснении специфических особенностей наблюдаемых. Подобные вычисления были выполнены и для бо-

зон, рассматривавшихся в § 1, и для фермионов (см. § 3). В случае бозонов Штумпф и Ямамото [105] исследовали уравнение на собственные значения типа

$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (5.31)$$

Хотя первый член по существу эквивалентен (5.6), второе слагаемое оказывает небольшое влияние на массу пиона и резко уменьшает (на 20—30%) массу  $\eta$ -мезона. В случае фермионов в работе Дюрра и Гейзенберга [79] были включены члены, которые соответствуют рождению и уничтожению виртуальных бозонов; если бы вычисления исходили не из уравнения (5.27), а из оператора  $\mathcal{L}$ , входящего в (4.29), то указанные члены появлялись бы автоматически, так как  $\mathcal{L}$  в уравнении (4.29) содержит слагаемое

$$\text{Diagram} \quad (5.32)$$

Графически их можно изобразить следующим образом:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (5.33)$$

где волнистая линия означает регуляризованный бозонный пропагатор. Эти члены приводят к двум существенным изменениям. Во-первых, величина  $\kappa l/2\pi$  уменьшается с 1,02 примерно до 0,9; кроме того, рождение и уничтожение  $K$ -мезонов приводят к расщеплению масс барионного полюса на собственные значения  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  и  $\Xi$ . Это расщепление подробно будет обсуждаться в гл. 7, в которой излагается теория странных частиц. В обоих случаях (и для бозонов, и для фермионов) поправки значительно улучшают совпадение вычисленных масс с их измеряемыми значениями.

Существует множество других состояний, которые из-за их трансформационных свойств нельзя рассматривать с помощью уравнений на собственные значения типа (5.19), (5.20) или (5.29). Бозоны, которые состоят

из фермионов, находящихся не в  $S$ -состоянии (орбитальный момент отличен от нуля), или фермионы спина  $3/2$  или более высокого с самого начала требуют введения более сложных  $\varphi$ -функций. Уже векторные мезоны, подобные  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\rho$  и  $K^*$ , могут представлять  $d$ -состояние (орбитальный момент равен двум) фермион-антифермионной системы, спин которой равен 1 и направлен в сторону, противоположную орбитальному моменту; тем самым эти частицы могут относиться к указанной группе. В подобных случаях уже простейшее уравнение на собственные значения, получаемое из формализма Тамма — Данкова, является настоящим интегральным уравнением, которое не сводится к алгебраическому уравнению относительно массы. Рано или поздно численные методы приведут к приближенным собственным значениям, но до сих пор не было сколько-нибудь серьезных попыток решить такие интегральные уравнения.

### § 5. Четность собственных состояний

Вычисления этой главы проводились с двумерным представлением группы Лоренца, которому соответствует уравнение (3.1). Поэтому в такой схеме определена лишь операция  $PG$ , а не  $P$  и  $G$  по отдельности. Трансформационные свойства вычисленных собственных значений по отношению к  $PG$  определить легко. При этом преобразовании фермионы превращаются в соответствующие антифермионы; поэтому для них вопрос о свойствах симметрии относительно  $PG$  не возникает. Для бозонов ( $\pi$  и  $\eta$ ) из (3.14) и (3.15) можно заключить, что под действием  $PG$ , примененной к их собственным функциям в системе покоя [ $J^\mu = (\kappa_B, 0, 0, 0)$ ]

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\chi^*(0) \sigma^0 \chi(0) | B \rangle &\rightarrow \langle 0 | T\chi(0) R^{-1} \sigma^0 R \chi^*(0) | B \rangle = \\ &= - \langle 0 | T\chi^*(0) \sigma^0 \varphi(0) | B \rangle, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\chi^*(0) \sigma^0 \tau_k \chi(0) | B \rangle &\rightarrow \langle 0 | T\chi(0) R^{-1} \sigma^0 \tau_k R \chi^*(0) | B \rangle = \\ &= + \langle 0 | T\chi^*(0) \sigma^0 \tau_k \chi(0) | B \rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Поэтому  $\eta$ -мезон имеет  $PG = -1$ , а пион —  $PG = +1$ .

Сами по себе операции  $P$  и  $G$  можно определить лишь в том случае, когда используется четырехмерное представление группы Лоренца [уравнение (3.22)]. Ес-



ли для уравнения (3.1) существует конечное собственное значение массы, то, как было указано в § 2 гл. 3, можно построить оператор  $\tilde{\chi}(x)$ , удовлетворяющий уравнению (3.17) с тем же собственным значением массы, а  $\chi(x)$  и  $\tilde{\chi}(x)$  связать посредством системы (3.20). Две системы уравнений на собственные значения, в которые входят  $\chi(x)$  и  $\tilde{\chi}(x)$ , можно объединить в одну, если исходить из (3.22) и двухточечной функции (3.40) или (3.42). Тогда предположение, что барионный полюс возникает в (3.40) лишь один раз, а именно в  $\rho_1(x^2)$  [но не в  $\rho_2(x^2)$ ], является вопросом определения (и, как мы увидим, непротиворечивого). Можно считать, что соответствующий барион, по определению, имеет  $p = +1$ ; тогда отвечающий ему антибарион должен иметь  $p = -1$ .

Объединение двух систем уравнений на собственные значения в одну посредством (3.20) и (3.40) или (3.42) еще не устанавливает связь между величинами  $\langle 0 | T\chi^*(x)\sigma^v\chi(x) | B \rangle$  и  $\langle 0 | T\tilde{\chi}^*(x)\bar{\sigma}^v\tilde{\chi}(x) | B \rangle$ , которая позволила бы решить вопрос о четности бозонов.

Вместе с тем из чисто физических соображений можно сказать, что собственная функция типа (5.1) с двумя одинаковыми координатами описывает систему, состоящую из бариона и антибариона в  $S$ -состоянии (орбитальный момент равен нулю); поэтому ее четность должна быть отрицательной ( $P = -1$ ). Математически этот результат можно получить, если связать матричный элемент  $\langle 0 | T\chi^*(x)\tilde{\chi}(x) | B \rangle$  посредством двухточечной функции (3.40) или (3.42) как с  $\langle 0 | T\chi^*(x)\sigma^0\chi(x) | B \rangle$ , так и с  $\langle 0 | T\tilde{\chi}^*(x)\sigma^0\tilde{\chi}(x) | B \rangle$ . Следуя (4.21), мы можем в  $\langle 0 | T\chi^*(x)\tilde{\chi}(x) | B \rangle$  заменить или  $\chi^*(x)$ , или  $\tilde{\chi}(x)$  выражением типа

$$\int d^4x' G(xx') : \sigma^v\chi(\chi^*\sigma_v\chi) : .$$

Используя двухточечную функцию

$$\hat{F}(xy) = \langle 0 | T\chi^*(x)\tilde{\chi}(y) | 0 \rangle, \quad (5.36)$$

которая берется из (3.40) или (3.42), в первом приближении можно свести возникающие выражения к

матричным элементам лишь двух полевых операторов. Тогда в системе покоя для бозонов возникают два уравнения:

$$\begin{aligned}\langle 0|T\chi^*(x)\tilde{\chi}(x)|B\rangle &= \int d^4x' K_0(xx') \langle 0|T\chi^*(x')\sigma^0\chi(x')|B\rangle, \\ \langle 0|T\chi^*(x)\tilde{\chi}(x)|B\rangle &= \int d^4x' \tilde{K}_0(xx') \langle 0|T\tilde{\chi}^*(x')\sigma^0\tilde{\chi}(x')|B\rangle.\end{aligned}\quad (5.37)$$

Интегральные операторы  $K_0$  и  $\tilde{K}_0$  определяются формулами

$$\begin{aligned}K_0 &= \text{const} \cdot \text{Sp}(\sigma_0 G(xx') \hat{F}(x'x) \dots), \\ \tilde{K}_0 &= \text{const} \cdot \text{Sp}(\sigma_0 G(x'x) \hat{F}(xx') \dots)\end{aligned}\quad (5.38)$$

с одинаковыми константами. Из общих свойств  $G$  и  $\hat{F}$  [ср. соотношение (I.13)] можно заключить, что  $G(xx') = -G(x'x)$ ,  $\hat{F}(xx') = \hat{F}(x'x)$  и поэтому  $\tilde{K}_0 = -K_0$ . В итоге уравнения (5.37) требуют, чтобы

$$\langle 0|T\chi^*(x)\sigma^0\chi(x)|B\rangle = -\langle 0|T\tilde{\chi}^*(x)\sigma^0\tilde{\chi}(x)|B\rangle, \quad (5.39)$$

что эквивалентно  $P = -1$ . При этом выводе существенно предположение, что в выражениях (3.40) или (3.42)

$$\hat{F}(xy) \neq 0$$

или

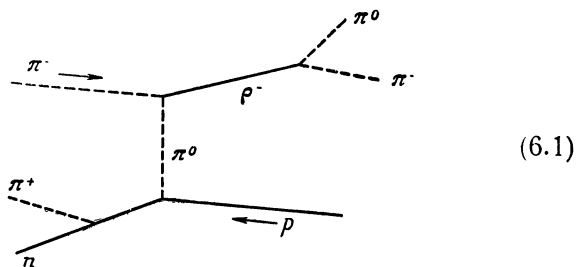
$$\rho_1(\kappa^2) \neq \rho_2(\kappa^2). \quad (5.40)$$

Это происходит лишь тогда, когда фермионам конечной массы приписана определенная четность, так что можно определить четность бозонов. Окончательно четность  $\pi$ - и  $\eta$ -мезона и, как будет видно дальше, также и  $K$ -мезона равна  $-1$ .

## ТЕОРИЯ КОНСТАНТ СВЯЗИ

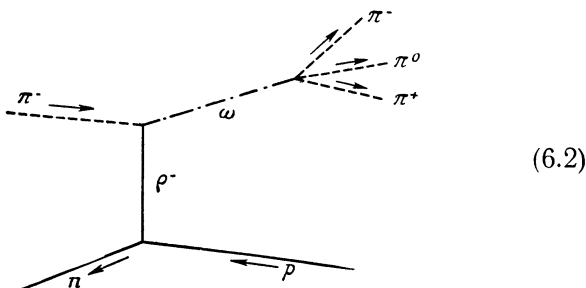
### § 1. Предварительные замечания и определение констант связи

При столкновении двух частиц можно наблюдать множество различных процессов типа рассеяния, рождения новых частиц, превращения частиц в другие и т. д. Единственными ограничениями являются законы сохранения: полная симметрия входящих частиц должна совпадать с полной симметрией уходящих. Вероятность данного процесса можно определить из асимптотического поведения функций Грина, как это обсуждалось в § 5 гл. 4. С практической точки зрения часто оказывается удобным разбивать рассматриваемый процесс на менее сложные виртуальные, про которые можно говорить, что они происходят один после другого. В качестве примера упомянем рождение трех пионов при столкновении двух пионов и протона. Возможное разбиение было бы таким:

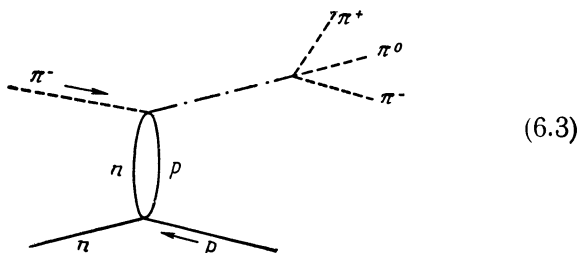


Оно никоим образом не является однозначным. Другой возможный вариант этого же процесса изображается

диаграммой



Как правило, существует множество «каналов», по которым может протекать процесс. Преимущество разбиения основано на том, что в полном  $S$ -матричном элементе главную роль может играть один (или несколько) подобных рисунков. Термин «главная роль» означает, что при вычислении «вклада» лишь от этого одного рисунка получается вполне приемлемое приближение для  $S$ -матричного элемента. Этот вклад можно оценить, если известны  $S$ -матричные элементы более простых процессов, содержащихся в рисунке. С другой стороны, предположение, что  $S$ -матрица является суммой вкладов отдельных рисунков, несомненно, не является правильным. В процессе, который использовался в качестве примера, диаграмма



уже содержит (6.2), и его вклад нельзя просто добавить к вкладу от (6.2). Поэтому концепция «главного»

вклада оправдана лишь в окрестности полюсов, т. е. когда вектор энергии-импульса данной линии настолько близок к полюсу в соответствующей двухточечной функции (если он лежит «вблизи массовой оболочки»), что этот член гораздо больше любого другого вклада. Тем не менее подобное полюсное приближение для  $S$ -матричных элементов является полезным инструментом при феноменологическом анализе экспериментов. Поэтому некоторые свойства простейших  $S$ -матричных элементов могут пригодиться при исследовании более сложных процессов. Обычно наиболее простой матричный элемент содержит лишь три оператора «свободного поля», например один входящий и два уходящих:

$$\langle 0 | \psi_{\text{in}}^{(1)}(x_1) \psi_{\text{out}}^{(2)}(x_2) \psi_{\text{out}}^{(3)}(x_3) | 0 \rangle. \quad (6.4)$$

Такой  $S$ -матричный элемент в строгом смысле не существует. Его физическая интерпретация означала бы, что частица 1 делится на две частицы 2 и 3. Если этот процесс возможен, т. е. совместим со всеми законами сохранения, то частица 1 не могла бы появиться в качестве асимптотического входящего поля, так как она обладает лишь конечным временем жизни; если же процесс невозможен, то матричный элемент обращался бы в нуль. Тем не менее выражению вида (6.4) можно придать смысл, если обратиться не к  $S$ -матрице, а к вакуумным  $t$ -функциям, из которых  $S$ -матричные элементы получаются с помощью асимптотических предельных переходов не к свободным полям  $\psi_{\text{in}}^{(1)}, \psi_{\text{out}}^{(2)}, \dots$ , а к операторам  $O_\lambda(x)$ , которые рассматривались в § 3 гл. 2. Поведение матричного элемента

$$\langle 0 | O^{(1)}(x_1) O^{(2)}(x_2) O^{(3)}(x_3) | 0 \rangle \quad (6.5)$$

( $O^{(i)}$  имеет такие же трансформационные свойства, как и  $\psi_{\text{in}}^{(1)}$ , и т. д.) можно изучить в окрестности полюсов, соответствующих свободным полям  $\psi_{\text{in}}^{(1)}, \psi_{\text{out}}^{(2)}, \psi_{\text{out}}^{(3)}$ . Если полюс, относящийся к  $O^{(i)}(x)$  [в смысле соотношения (2.15)], характеризуется массой  $m_i$ , то в импульсном

пространстве матричный элемент (6.5) будет содержать член вида

$$\langle 0 | O^{(1)}(p_1) O^{(2)}(p_2) O^{(3)}(p_3) | 0 \rangle = \\ = \frac{c^{(123)}}{(p_1^2 - \kappa_1^2)(p_2^2 - \kappa_2^2)(p_3^2 - \kappa_3^2)} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3) + \dots, \quad (6.6)$$

причем другие члены менее сингулярны. Ясно, что  $S$ -матричные элементы (6.4) не существуют, поскольку нельзя найти три действительных четырехмерных вектора  $p_1, p_2, p_3$ , для которых выполняются соотношения

$$p_1^2 - \kappa_1^2 = 0, \quad p_2^2 - \kappa_2^2 = 0, \quad p_3^2 - \kappa_3^2 = 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 0. \quad (6.7)$$

Казалось бы, что если частица 1 способна реально распадаться на частицы 2 и 3, то этим соотношениям удовлетворить можно; но в подобном случае полюс  $p_1^2 - \kappa_1^2 = 0$  не лежал бы на действительной оси, так как масса  $\kappa_1$  содержала бы мнимую часть. Однако соотношения (6.7) могут выполняться для комплексных четырехмерных векторов, получаемых с помощью аналитического продолжения. Поэтому  $c^{(123)}$  является корректно определенным числом, которое по-прежнему зависит от свойств симметрии и масс трех частиц. Эта константа  $c^{(123)}$  пропорциональна числу свободных полевых операторов, содержащихся в величинах  $O^{(i)}$ . Если оператор  $O^{(i)}(x)$  удовлетворяет соотношению (2.15), то это означает, что асимптотически он стремится к  $c_i \psi_{in/out}^{(i)}(x)$ ; значение  $c_i$  сразу же можно вывести из (2.15), а свободные поля  $\psi^{(i)}$  определяются так, чтобы они были нормированы обычным образом. Поэтому величина

$$f^{(123)} = \frac{c^{(123)}}{c_1 c_2 c_3} \quad (6.8)$$

по сути дела дает о взаимодействии трех частиц информацию, не зависящую от того, какие операторы  $O^{(i)}$  используются для описания частиц. Можно назвать  $f^{(123)}$  константой связи трех полей; она (с точностью до три-

виального численного коэффициента) эквивалентна константе связи старых феноменологических теорий.

Исторически константа связи определялась из лагранжиана свободных полей, к которому в качестве «малого возмущения» некоторым необоснованным способом добавлялся член взаимодействия. Тогда член первого порядка по возмущению приводит к выражению типа (6.6), в чем можно убедиться следующим образом.

Для действительных полей  $\varphi_i$  лагранжиан можно определить как

$$\mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \varphi_i (\square + \kappa_i^2) \varphi_i + f \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \right]. \quad (6.9)$$

Из уравнения  $(\square + \kappa_1^2) \varphi_1 = -f \varphi_2 \varphi_3$  следует, что

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x)_0 - f \int d^4x' G(xx') \varphi_2(x') \varphi_3(x'), \quad (6.10)$$

где  $G(xx')$  — функция Грина, соответствующая уравнению  $(\square + \kappa_1^2) \varphi_1 = 0$ , и

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3) | 0 \rangle &= \\ &= -f \int d^4x' G(xx') \langle 0 | \varphi_2(x') \varphi_3(x') \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3) | 0 \rangle + \dots \approx \\ &\approx -f \int d^4x' G(xx') \langle 0 | \varphi_2(x') \varphi_2(x_2) | 0 \rangle \times \\ &\quad \times \langle 0 | \varphi_3(x') \varphi_3(x_3) | 0 \rangle + \dots \quad (6.11) \end{aligned}$$

В импульсном пространстве последнее соотношение по существу сводится к

$$\frac{f}{(p_1^2 - \kappa_1^2)(p_2^2 - \kappa_2^2)(p_3^2 - \kappa_3^2)} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (6.12)$$

Однако эта процедура в целом не справедлива в квантовой теории поля, так как для операторов свободных полей не может существовать никакого взаимодействия, а член взаимодействия  $f \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$  будет изменять массы и рассматривать его как малое возмущение, безусловно, нельзя. Формулы типа (6.9) — (6.12) не следуют из фундаментального полевого уравнения, подобного (3.1).

Но если аналитическое продолжение матричных элементов в область комплексных значений импульсов возможно, то константы связи удастся определить с помощью соотношений (6.6) и (6.8).

Для экспериментального определения констант связи можно экстраполировать измеренные кривые для определенных поперечных сечений к полюсу, что заменяет аналитическое продолжение. Этот прием будет приводить к надежным значениям лишь в том случае, если к импульсам, удовлетворяющим соотношениям (6.7), можно подойти весьма близко, например когда две массы равны, а третья гораздо меньше них. Это является основной причиной того, что в настоящее время хорошо известны лишь константы связи световых квантов со всеми видами элементарных частиц и пиона с нуклоном.

## § 2. Связь $\pi$ - и $\eta$ -мезонов с барионами <sup>1)</sup>

Наиболее простой способ вычисления константы связи  $\pi$ - или  $\eta$ -мезонов с нуклонами (или  $E$ -частицами) заключается в сравнении четырехточечной функции фермионов в окрестности бозонного полюса с соответствующей величиной, получаемой из феноменологической теории.

Так как фермионы имеют конечную массу, в теории этого последнего типа их можно описывать двумя вейлевскими спинорами  $\chi(x)$  и  $\tilde{\chi}(x)$  или одним дираковским спинором  $\psi(x)$ , а свободные бозоны — псевдоскалярной изоскалярной функцией  $\Phi(x)$  или псевдоскаляром-изовектором  $\Phi_i(\lambda)$ . Так как здесь нас не интересует масса фермионов или «одетая» фермионная линия, то будет вполне достаточно рассмотреть двухкомпонентное уравнение Вейля типа

$$i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\nu}} + \frac{f}{\kappa_B} \sigma^{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \chi + \dots = 0 \text{ для изоспина } 0, \quad (6.13)$$

или

$$i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\nu}} + \frac{f}{\kappa_B} \tau_k \sigma^{\nu} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^{\nu}} \chi + \dots = 0 \text{ для изоспина } 1. \quad (6.14)$$

<sup>1)</sup> См. работы [103, 106].



Здесь  $\kappa_B$  — масса бозона,  $f$  — феноменологическая (псевдо)векторная константа связи. Тогда соответствующую часть четырехточечной функции

$$\langle 0 | T \chi(x_1) \chi(x_2) \chi^*(x_3) \chi^*(x_4) | 0 \rangle$$

феноменологической теории в низшем приближении метода Тамма—Данкова и в окрестности бозонного полюса можно представить следующим образом:

$$\text{blob} = \text{tree-level diagram with wavy line}, \quad (6.15)$$

где волнистая линия обозначает бозонный пропагатор. Это выражение нужно сравнить с соответствующим выражением (4.27) или (4.35) единой теории поля

$$\text{blob} = \text{tree-level diagram with straight line and loops} \approx \text{tree-level diagram with straight line and loops}, \quad (6.16)$$

Две диаграммы (6.15) и (6.16) по отношению к фермионным линиям приблизительно эквивалентны; различие состоит лишь в том, что  $G$ -линия, имеющаяся в (6.15), в диаграмме (6.16) заменяется  $F$ -линией. Так как процесс «одевания» фермионов (который в феноменологической формулировке смысла не имеет) здесь обсуждаться не будет, то это различие несущественно. В нелинейной теории бозонная линия заменяется на  $1/(1 - \text{loop})$ , а вершины определяются уравнением (3.1), или, в более явной форме, формулой (5.7).

Следовательно, соответствующую часть диаграммы (6.15) можно записать в виде

$$\frac{f(iJ_\mu/\kappa_B)(-iJ_\nu/\kappa_B)f}{J^2 - \kappa_B^2} = f^2 \frac{(J_\mu J_\nu)/\kappa_B^2}{J^2 - \kappa_B^2}, \quad (6.17)$$

а диаграмма (6.16) дает

$$\frac{Z I^2 (J_\mu J_\nu)/J^2}{1 + Z (\kappa l/2\pi)^2 q_0(\lambda)}, \quad (6.18)$$

Здесь  $Z = 3/4$  для изоспина 0 и  $Z = 1/4$  для изоспина 1. Величина  $J_\mu J_\nu / J^2$  является проекционным оператором для дираковского спина, равного 0 [ср. (5.18)]. Раскрывая значение знаменателя в окрестности полюса, получаем

$$\frac{Z i^2 (J_\mu J_\nu) / J^2}{1 - 1 + Z (\kappa l / 2\pi)^2 (\partial q_0 / \partial \lambda) (J^2 - \kappa_B^2) / \kappa^2} = 4\pi^2 \frac{(J_\mu J_\nu) / \kappa_B^2}{(J^2 - \kappa_B^2) (\partial q_0 / \partial \lambda)}. \quad (6.19)$$

Сравнение (6.17) и (6.19) дает

$$f^2 = \frac{4\pi^2}{\partial q_0 / \partial \lambda}. \quad (6.20)$$

Для значений  $\lambda$ , соответствующих бозонным массам, величина  $\partial q_0 / \partial \lambda$  больше нуля. Этот результат говорит о том, что норма бозонных состояний положительна, как и обсуждалось в § 1 гл. 5 и предполагалось в феноменологической теории (6.13). При численной оценке удобно  $q_0(\lambda)$  из формулы (5.13) раскрыть для малых значений  $\lambda$ :

$$q_0(\lambda) \approx \ln \lambda - \frac{3}{2} + \frac{\lambda}{3} + \dots \quad \text{для } \lambda \ll 1. \quad (6.21)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial q_0(\lambda)}{\partial \lambda} \approx \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{для } \lambda \ll 1 \quad (6.22)$$

и

$$\frac{f^2}{4\pi} \approx \pi \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) = \pi \frac{\kappa_B^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\kappa_B^2}{3\kappa^2}\right). \quad (6.23)$$

Если для  $\kappa_B$  и  $\kappa$  подставить экспериментальные значения массы пиона и нуклона соответственно, то получим

$$\frac{f^2}{4\pi} = 0,07 \quad (6.24)$$

в удовлетворительном согласии с эмпирической величиной 0,08.

В феноменологической теории вместо псевдовекторной связи можно рассматривать псевдоскалярную.

В этом случае константа псевдоскалярной связи  $g$  связана с константой псевдовекторной связи соотношением

$$g = \frac{2\kappa}{\kappa_B} f. \quad (6.25)$$

Поэтому теория дает

$$\frac{g^2}{4\pi} = 4\pi \left( 1 - \frac{\kappa_B^2}{3\kappa^2} \right), \quad (6.26)$$

т. е. для пиона

$$\frac{g^2}{4\pi} = 12,5,$$

для  $\eta$ -мезона

$$\frac{g^2}{4\pi} = 11,1.$$

По чисто историческим причинам вместо значений  $g$  и  $f$  мы указываем величины  $g^2/4\pi$  и  $f^2/4\pi$ . Эмпирическое значение константы пион-нуклонной связи равно 14,4, а для  $\eta$ -мезона оно равно 12,1. Последнее число является, однако, очень ненадежным, так как оно было определено весьма косвенными методами из экспериментов по нуклон-нуклонному рассеянию (Скотти и Уонг [107]).

Аналогичные вычисления можно провести и для собственных значений (5.21) и (5.22), относящихся к дираковскому спину 1. В этом случае феноменологические уравнения имеют вид

$$i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\nu}} + f\sigma^{\nu} \chi A_{\nu} + \dots = 0, \quad (6.27)$$

а (6.15) нужно заменить на

$$f^2 \frac{-g_{\mu\nu} + (J_{\mu}J_{\nu})/J^2}{J^2 - \kappa_B^2}. \quad (6.28)$$

Следовательно, при сравнении с нелинейной теорией, основанной на уравнении (3.1), мы должны подразумевать

$$f^2 = - \frac{4\pi^2}{\partial q_1 / \partial \lambda}. \quad (6.29)$$

Перед правой частью (6.29) стоит знак, обратный соответствующему знаку в (6.20). Так как для собственных

значений (5.21) и (5.22) величина  $\partial q_1/\partial \lambda$  снова положительна, то равенству (6.29) удовлетворить нельзя; этот результат указывает на то, что норма таких бозонов со спином 1 была бы отрицательной. Если бы в феноменологической теории допускались бозоны отрицательной нормы, то в (6.28) и (6.29) знаки были бы обратными и равенству (6.29) можно было бы удовлетворить. Тот факт, что норма состояний (5.21) и (5.22) отрицательна, уже упоминался в § 1 гл. 5. Анализ граничных условий в § 2 гл. 5 показал, что такие состояния не могут фигурировать в качестве входящих или уходящих частиц и что в действительности они являются призрачными состояниями, а не реальными частицами.

### § 3. Норма бозонных состояний

Выражения  $\chi^*(x)\sigma_\mu\chi(x)$  содержат матричные элементы, относящиеся к рождению и уничтожению бозонов, и в этом смысле они соответствуют феноменологическим операторам  $\partial\Phi/\partial x_\mu$ ; поэтому можно положить

$$\langle 0|\chi^*(x)\sigma^\mu\chi(x)|B\rangle = \frac{a}{l}\langle 0\left|\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_\mu}\right|B\rangle, \quad (6.30)$$

$$\langle 0|\chi^*(x)\sigma^\mu\tau_k\chi(x)|B\rangle = \frac{a}{l}\langle 0\left|\frac{\partial\Phi_k(x)}{\partial x_\mu}\right|B\rangle \quad (6.31)$$

и задать вопрос, какова величина безразмерной константы  $a$ , если  $\Phi(x)$  нормирована обычным образом. Если два оператора  $\chi^*(x)$  и  $\chi(x)$ , входящие в член взаимодействия фундаментального уравнения (3.1), образуют при объединении бозонный оператор (а это можно осуществить двумя способами), то константу  $a$  сразу же определяет сравнение (6.30) и (6.31) с (6.13) и (6.14):

$$2Zla = \frac{l}{\kappa_B}, \quad (6.32)$$

где снова для изоспина 0  $Z=3/4$ , а для изоспина 1  $Z=1/4$ . Коэффициент 2 в левой части возникает благодаря существованию двух эквивалентных способов объединения  $\chi^*(x)$  с  $\chi(x)$ .

Из (6.20) и (6.32)

$$a^2 = \frac{\pi^2}{Z^2 l^2 \kappa_B^2 (\partial q_0 / \partial \lambda)}. \quad (6.33)$$

Если определить

$$\begin{aligned} \langle 0 | T (\chi^*(x) \sigma_\mu \tau_\rho \chi(x)) (\chi^*(y) \sigma_\nu \tau_\sigma \chi(y)) | 0 \rangle = \\ = \delta_{\rho\sigma} (2\pi)^{-4} \int d^4 J e^{iJ(x-y)} G_{\mu\nu}(J), \end{aligned} \quad (6.34)$$

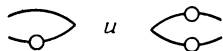
то (6.30), (6.31) и (6.33) приведут к полюсному приближению


$$G_{\mu\nu}(J) \approx \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} \frac{1}{4Zl^2 (1 - \text{loop})}. \quad (6.35)$$




Соотношения (6.33) и (6.35) по существу эквивалентны аналогичным соотношениям, полученным в литературе (например, Куткоски и Леоном [108]) в качестве следствия уравнения Бете — Салпетера. Соотношение (6.35) сразу же можно получить из (6.16), если в обеих частях этого равенства направить внешние линии в одну и ту же точку:

$$\begin{aligned} \text{diagram} \approx \text{diagram} = \\ = \text{diagram} \frac{\text{diagram}}{1 - \text{diagram}} \text{diagram}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Части



аналогичны ядру , за исключением следующих различий: два конца не объединяются и тем самым не

образуют вершину уравнения (3.1); поэтому если бы мы хотели заменить обе эти части множителем , то нужно было бы добавить коэффициент  $Zl^2$ . Так как в левой из них выбирается лишь одна комбинация  $\chi^*(x)$  и  $\chi(x)$ , в то время как вклад в ядро  всегда дает две эквивалентные комбинации, то при замене обе части нужно умножать также на коэффициент 2. Поэтому полный коэффициент, который появляется в знаменателе (6.35), и равен  $4Zl^2$ ; в окрестности полюса ядро  можно заменить на единицу. В правой части имеется еще одно различие — между  $F$ - и  $G$ -линиями; видимо, оно будет играть важную роль в высших приближениях.

Уравнения (4.27) и (6.36), взятые вместе, устанавливают связь между двухточечными функциями фермионов, т. е. между нормировкой фермионных и бозонных волновых функций. В нерелятивистской квантовой механике такую связь можно увидеть сразу. Отсутствие в этой теории связи между частицами и силами позволяет на определенное время заменить бозон волновым пакетом, состоящим из двух фермионов без каких бы то ни было взаимодействий. Взаимодействие будет влиять на движение фермионов, связывая их друг с другом, но оно не сказывается на норме бозона, которую нужно отождествить с нормой волнового пакета. В релятивистской теории поля разделять частицы и силы невозможно; поэтому связь здесь является более сложной. Тем не менее методы расчета нормы в квантовой механике должны иметь аналог и в релятивистской теории поля — по крайней мере в некотором приближении. Вычисления такого типа для  $\pi$ - и  $\eta$ -мезонов были успешно выполнены Ямадзаки [106].

#### § 4. Некоторые общие замечания о «полюсном» приближении для $S$ -матричных элементов

Вычисления, описанные в предыдущих параграфах, допускают некоторые обобщения, касающиеся более сложных  $S$ -матричных элементов. Рассмотрим случай двух входящих и  $n$  уходящих частиц.  $S$ -матричный

элемент для такого процесса можно получить из вакуумного среднего

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: An oval with lines extending from its top and bottom. The top lines are labeled 1, 2, ..., n. The bottom lines are labeled n+1, n+2.} \\
 & = \langle 0 | T O_1(x_1) O_2(x_2) \dots O_n(x_n) O_{n+1}(x_{n+1}) O_{n+2}(x_{n+2}) | 0 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

Операторы  $O_{n+1}(x_{n+1})$  и  $O_{n+2}(x_{n+2})$  должны обладать симметрией двух приходящих частиц, операторы  $O_1(x_1) \dots O_n(x_n)$  — уходящих частиц.  $S$ -матрица получается путем изучения асимптотического поведения (6.37) в пределе при  $t_{n+1}, t_{n+2} \rightarrow -\infty, t_1, t_2, \dots, t_n \rightarrow +\infty$ . Нормировку операторов можно выбрать из их двухточечных функций (2.15). Если перейти от координатного пространства к импульсному, а тем самым от  $O_i(x_i)$  к его фурье-образу, то в окрестности соответствующих полюсов (6.37) превратится в

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: An oval with lines extending from its top and bottom, similar to the one in (6.37).} \\
 & = \frac{i(p_1 \dots p_{n+2})}{(p_1^2 - \kappa_1^2)(p_2^2 - \kappa_2^2) \dots (p_{n+2}^2 - \kappa_{n+2}^2)} \delta^{(4)} \times \\
 & \quad \times (p_1 + p_2 + \dots + p_{n+2}).
 \end{aligned}
 \tag{6.38}$$


При анализе асимптотического поведения независимо от того, стремится ли  $t$  к  $+\infty$  или к  $-\infty$ , существенной является лишь окрестность полюсов. Это дает нам возможность уяснить смысл «кроссинг-симметрии». Для выражения (6.38) безразлично, описывает ли асимптотически оператор  $O_n(x_n)$  уходящую частицу массы  $\kappa_n$  или он представляет приходящую античастицу той же массы. Различие между пределами  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  будет существенным лишь при выборе контура интегрирования в комплексной  $(p_n)_0$ -плоскости. Поэтому между двумя  $S$ -матричными элементами, которые определяются уходящими частицами массы  $\kappa_n$  или приходящими античастицами такой же массы, должна существовать простая аналитическая связь.

Частично процесс столкновения, который описывается величиной, определяемой выражением (6.38), может быть обусловлен силами весьма далекого действия, например обменом одним пионом,  $\kappa$ - или  $\eta$ -мезоном. Это означает, что диаграмма будет содержать полюсной член типа

$$\text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}, \quad (6.39)$$

где волнистая линия соответствует бозону, которым осуществляется обмен. В этом случае поведение величины (6.38) в окрестности бозонного полюса снова можно получить из неоднородного интегрального уравнения

$$\text{Diagram 1} = \text{неодн часть} + \text{Diagram 2}, \quad (6.40)$$

где в первом приближении ядро во втором члене можно опять заменить выражением , входящим в (4.27), а неоднородной частью является простейшая фейнмановская диаграмма, которая приводит к (6.38).

Экспериментально полюсной член можно наблюдать лишь в том случае [109], если масса промежуточной частицы и передаваемый импульс весьма малы и если все другие близлежащие массы можно исключить при помощи условий симметрии. В других случаях отделение вкладов одного полюса от статистического фона вкладов всех остальных допустимых каналов вряд ли возможно. Поэтому для анализа экспериментальных данных полюсное приближение, или «модель одночастичного обмена», имеет ограниченную ценность.



## СТРАННЫЕ ЧАСТИЦЫ

## § 1. Вырождение основного состояния

Следуя аргументам, изложенным в гл. 1 и 3, мы будем рассматривать отклонение от изоспиновой симметрии, имеющееся в квантовой электродинамике, как указание на асимметрию основного состояния [59, 60]. Видимо, число протонов в реальной Вселенной очень сильно отличается от числа нейтронов, а число электронов — от числа нейтрино. Даже если бы материя и антиматерия были распределены во Вселенной с одинаковой средней плотностью (галактик, состоящих из материи, может быть столько же, сколько и из антиматерии) и, таким образом, полный изоспин был бы мал, то симметрия основного состояния все равно была бы плохой, так как полный изоспин материи был бы направлен в сторону, противоположную изоспину антиматерии, т. е. в изопространстве существовало бы макроскопическое отклонение от симметрии.

Асимметрия (а значит, и вырожденность) основного состояния представляет хорошо известное явление в обычной квантовой механике — оно имеет место во многих рассматриваемых нами системах. Очевидными примерами являются ферромагнетизм, сверхтекучесть, сверхпроводимость, кристаллическое состояние. В подобных системах возникают два важных новых явления [59, 60]; прежде чем переходить к математическому анализу, мы их обсудим сперва качественно — с физической точки зрения. Прежде всего вырождение основного состояния приводит к существованию бозонов нулевой массы покоя, как это в математической форме было указано Голдстоуном [80] (см. также [81—85]). Кроме того, частицы могут заимствовать некоторые свойства основного состояния, превращаясь тем самым из нормальных в странные [78, 79].

Теорему Голдстоуна (мы рассмотрим ее в несколько обобщенной форме) можно понять, если принять во внимание следующие соображения. Вырожденность основного состояния означает, что должно существовать преобразование, которое оставляет инвариантным гамильтониан, но переводит основное состояние в новое возможное состояние с той же энергией. Генератор этого преобразования является наблюдаемой, для которой инвариантность гамильтониана (или фундаментального полевого уравнения) обеспечивает наличие закона сохранения. Если в системе имеет место некоторый процесс, например столкновение двух частиц, то может показаться, что нарушается закон сохранения. Это происходит потому, что величина, соответствующая наблюдаемой, частично может передаваться системе в целом, т. е. в конце концов основному состоянию. Если теория локальна (причем достаточно локальности весьма общего типа), то сразу после процесса передаваемая величина будет локализована в окрестности той точки, в которой имело место столкновение, а затем начнет распространяться в виде сферической волны, которую можно сравнить с волнами, идущими по поверхности пруда после того, как в воду брошен камень. Сохраняющаяся величина является наблюдаемой, вследствие чего волны относятся к бозевскому типу, так как они похожи на «классические». В пределе очень больших длин волн движение, создаваемое волной, переходит в рассматриваемое преобразование основного состояния. Так как это преобразование не требует затрат энергии, с увеличением длины волны частота будет уменьшаться. Такое поведение соответствует волновому движению, которое в релятивистской теории связано с частицами нулевой массы покоя.

С физической точки зрения волны или бозоны нулевой массы будут (но не обязательно) восстанавливать закон сохранения, так как они обычно не имеют строго определенных трансформационных свойств относительно соответствующего преобразования. Асимметрия основного состояния будет создавать такие бозоны в виде смешанных состояний («шизонов» [110]), отдельные части которых имеют разные свойства симметрии. Поэто-

му нам и может показаться, что во всех экспериментах, в которых испускаются или поглощаются такие бозоны, закон сохранения нарушается.

Вместе с тем любая частица будет теперь окружена облаком виртуальных голдстоуновских бозонов (наподобие того, как каждая заряженная частица окружена кулоновским полем), и поэтому всякое испускание частицы будет, как правило, связано с испусканием «инфракрасных» голдстоуновских бозонов, что было подробно рассмотрено Блохом и Нордсиком [24] для электродинамических задач. Закон сохранения удастся проверить экспериментально лишь в таком приближении, в котором можно пренебречь всеми подобными эффектами, считая, что массы инфракрасных бозонов включены в массы частиц.

Появление странных частиц можно понимать как результат взаимодействия между одиночными частицами и самим основным состоянием. Прежде всего это взаимодействие приводит к расщеплению собственных значений масс, которые в его отсутствие равны. Например, в ферромагнетике энергия возбужденного электрона будет зависеть от направления его спина по отношению к направлению полного магнитного момента. Если взаимодействие становится большим, то оно может привести к сильной связи типа Рассела — Саундерса [111] между спином возбужденного электрона и спином ближайшего электрона из основного состояния. В этом случае возбужденный электрон будет вести себя так, как будто вместо своего естественного спина  $1/2$  он имеет спин, равный 1 или 0. Аналогично если к нормальной частице из основного состояния присоединяется изоспин  $1/2$  или 1, то могут рождаться странные частицы.

Наконец, вырожденность основного состояния может приводить к некоторым изменениям теоретико-групповой структуры теории, если в него ввести новые степени свободы. В рассматриваемой теории это изменение можно наблюдать в двух пунктах. Во-первых, нарушение масштабной инвариантности путем введения в двухточечную функцию основного состояния полюса конечной массы позволяет ввести новую операцию — пространственной четности. Кроме того, нарушение фотонами и спурионами

изоспиновой группы позволяет разделить калибровочную группу (3.12) на две, одна из которых относится к лоренцеву пространству, а другая — к изопространству.

Две основные характерные черты вырождения основного состояния — существование голдстоуновских бозонов и странных частиц — удобно обсудить на примере простой модели из обычной квантовой механики. Поэтому, чтобы продемонстрировать указанные особенности и методы их анализа, мы рассмотрим далее упрощенную модель ферромагнитного тела.

## § 2. Сравнение с упрощенной моделью ферромагнетизма <sup>1)</sup>

Рассмотрим линейную цепочку  $N$  атомов, причем эта цепочка изогнута в виде кольца, так что атомы с номерами  $N$  и  $1$  являются соседями. Предполагается, что электроны закреплены в своих атомах — по одному в каждом; спины двух соседних электронов могут обладать взаимодействием, которое стремится расположить их параллельно друг другу. В термодинамическом смысле такая система еще не будет ферромагнетиком, но в ее низшем состоянии все магнитики будут расположены параллельно, а этого для наших целей достаточно. Основное состояние  $(N+1)$ -кратно вырождено, так как проекция полного спина на ось  $z$  может принимать значения

$$-\frac{N}{2}, \quad -\frac{N}{2} + 1, \quad \dots, \quad +\frac{N}{2} - 1, \quad \frac{N}{2}.$$

До сих пор состояние системы можно было характеризовать, указывая направление спина каждого отдельного атома. Но кроме этих электронов, находящихся в низших состояниях, может существовать возбужденный электрон в более высоком состоянии (предположим, что в низших состояниях никаких дырок нет); примем, что электронные волновые функции атомов с номерами  $n$  и  $n+1$  частично перекрываются, так что возбужденный

<sup>1)</sup> См. работу [112].

электрон может двигаться по кольцу. Его спин взаимодействует со спином электрона, находящегося в низшем состоянии в том же атоме. Чтобы описать существование этого возбужденного электрона, мы введем операторы  $a_n^*$  его рождения и  $a_n$  его уничтожения в  $n$ -м атоме ( $a_m^\lambda a_n^{*\mu} + a_n^{*\mu} a_m^\lambda = \delta_{nm} \delta_{\lambda\mu}$ ;  $\lambda$  есть плюс или минус и указывает направление спина).

Тогда гамильтониан системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H = Na - \alpha \sum_{n=1}^N \sigma_n \sigma_{n+1} + \beta \sum_{n=1}^N a_n^{*\lambda} a_n^\lambda - \\
 - \sum_{n=1}^N (a_n^{*\lambda} a_{n+1}^\lambda + a_{n+1}^{*\lambda} a_n^\lambda) (\gamma + \delta \sigma_n \sigma_{n+1}) - \\
 - \varepsilon \sum_{n=1}^N a_n^{*\lambda} \sigma_{\lambda\mu} a_n^\mu \sigma_n. \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_n$  — матрицы Паули, действующие на спин электрона, находящегося в основном состоянии атома  $n$ , а  $\sigma$  относится к возбужденному электрону. Из  $N + 1$  возможных основных состояний (вырожденных) мы выберем в качестве  $|0\rangle$  такое состояние, в котором проекция полного спина на ось  $z$  равна  $N/2$ .

Рассмотрим сперва те состояния системы, в которых нет возбужденных электронов. Вектор

$$|n\rangle = \frac{1}{2} (\sigma_{n,x} - i\sigma_{n,y}) |0\rangle \quad (7.2)$$

будет описывать нестационарное состояние системы, в котором все спины расположены в положительном направлении оси  $z$ ; исключение составляет спин  $n$ -го атома — он имеет противоположное направление. Тогда получим стационарное состояние системы, полагая

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} |n\rangle, \quad k = \frac{2\pi}{N} r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Энергию этого состояния вычислим из (7.1)

$$E_k = 4\alpha(1 - \cos k) \quad (7.4)$$

в предположении, что энергия основного состояния равна нулю:  $E=0$  для  $|0\rangle$ . Вектор  $|k\rangle$  описывает существование спиновой волны того типа, который впервые обсуждался Блохом [87]. Величину  $k$  можно назвать импульсом спиновой волны; при  $k \rightarrow 0$  энергия становится равной нулю, как это и требуется теоремой Голдстоуна. Так как наша модель является существенно нерелятивистской, то мы не можем ожидать существования бозона с нулевой массой покоя, но должны ожидать, что имеется состояние, удовлетворяющее условию  $E_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ . Следовательно, блоховские спиновые волны играют роль голдстоуновских волн. Состояние  $|k\rangle$  при  $k=0$  не совпадает с  $|0\rangle$ ; оно является одним из возможных основных состояний, а именно таким, в котором проекция полного спинового момента на ось  $z$  равна  $N/2 - 1$ . Его можно назвать «спурионным» состоянием и применять этот термин вообще к любому состоянию, которое не отличается от основного своей энергией и импульсом, но имеет отличия по другим свойствам (в нашем примере по проекции спинового момента на ось  $z$ ). Оказывается, что, согласно (7.2), блоховские волны могут нести спин 1, но важно отметить, что он всегда должен иметь направление, противоположное полному магнитному моменту, для которого принято, что он направлен по оси  $z$ . Блоховское волновое состояние можно также переписать в виде

$$|k\rangle = \sum_{n=1}^N e^{ikn} \frac{1}{2} (1 - \sigma_z)_n |0'\rangle, \quad (7.5)$$

где  $|0'\rangle$  является «спурионным» состоянием  $|k=0\rangle$ . В такой форме блоховская волна не несет  $z$ -спин, а представляет смесь нулевого и единичного состояний, причем проекция спина на ось  $z$  равна нулю.

Если присутствует электрон, находящийся в возбужденном состоянии, то следует рассмотреть отдельно два случая: спиновое взаимодействие мало ( $\epsilon \ll \alpha, \gamma, \delta$ ) и спиновое взаимодействие является сильным ( $\epsilon \gg \alpha, \gamma, \delta$ ).

При  $\varepsilon \ll \alpha, \gamma, \delta$  вектор стационарного состояния можно приближенно записать следующим образом:

$$|e_k^\lambda\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} a_n^{*\lambda} |0\rangle. \quad (7.6)$$

Для двух состояний  $\lambda$  (плюс и минус) энергия будет различной; она определяется с помощью (7.1):

$$E_k^\pm \approx \beta - 2(\gamma + \delta) \cos k \mp \varepsilon. \quad (7.7)$$

Следовательно, имеется двойная полоса энергий, спин возбужденного электрона равен  $1/2$  и между расщепленными уровнями существует энергетическая разность  $2\varepsilon$ ; это указывает на то, что симметрия гамильтониана относительно вращения всех спинов оказывается нарушенной основным состоянием. Кроме возбужденного электрона, могут существовать также блоховские спиновые волны. В высших приближениях можно видеть, что, даже если спиновые волны сами по себе не присутствуют, они одевают возбужденный электрон; но здесь подобные высшие приближения обсуждаться не будут.

При  $\varepsilon \gg \alpha, \gamma, \delta$  получаются приближенные векторы состояний, соответствующие триpletу и синглету: триплет

$$\begin{aligned} |e_k^{+1}\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} a_n^{*+} |0\rangle, \\ |e_k^0\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} (a_n^{*-} |0\rangle + a_n^{*+} |n\rangle), \\ |e_k^{-1}\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} a_n^{*-} |n\rangle; \end{aligned} \quad (7.8)$$

синглет

$$|e_k^s\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} (a_n^{*-} |0\rangle - a_n^{*+} |n\rangle). \quad (7.9)$$

Согласно (7.1), соответствующие энергии равны для триплета

$$\begin{aligned} E_k^{+1} &\approx \beta - (2\gamma + 2\delta) \cos k - \varepsilon, \\ E_k^0 &\approx \beta + 2\alpha - (\gamma + 3\delta) \cos k - \varepsilon, \\ E_k^{-1} &\approx \beta + 4\alpha - 4\delta \cos k - \varepsilon; \end{aligned} \quad (7.10)$$

для синглета

$$E_k^s \approx \beta + 2\alpha - (\gamma + 3\delta) \cos k + 3\varepsilon. \quad (7.11)$$

В этом приближении мы пренебрегли резонансными эффектами между перекрывающимися или соседними энергетическими полосами. Поэтому формулы справедливы лишь в определенной области значений констант  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; так, для триплетного состояния требуется условие

$$|4\alpha^2 + 4\alpha(\gamma - \delta) \cos k + (\gamma + \delta)^2| \ll |4\alpha^2 - (\gamma + 3\delta)^2 \cos^2 k|.$$

Возникающую ситуацию можно описать, если сказать, что имеется странный электрон спина 1 и другой странный электрон спина 0, а две энергетические полосы разделены величиной  $4\varepsilon$ . В триплетной полосе существует расщепление уровней, которое зависит от угла между спином 1 странного электрона и магнитным моментом основного состояния.

Опять-таки наряду с возбужденным электроном могут присутствовать и спиновые волны, которые в высших приближениях будут одевать электрон. Следует также подчеркнуть, что возбужденный странный электрон несет нормальный заряд; даже если оказывается, что вместе с возбужденным электроном переносится спин электронов основного состояния, в переносе заряда они не участвуют.

Данную модель можно использовать также для обсуждения вакуумных средних произведений операторов; и если бы операторы  $a_n$  и  $a_n^*$  рассматривались как операторы  $a_n(t)$  и  $a_n^*(t')$ , зависящие от времени (т. е. если бы мы перешли от шредингеровской картины к картине, в которой вектор состояния от времени не зависит<sup>1)</sup>), то

<sup>1)</sup> Такое представление обычно называется гейзенберговским. → *Прим. ред.*



аналогия с теорией поля была бы весьма близкой. Однако такой путь приводит к значительным усложнениям, и в этих лекциях он будет исследован очень кратко, на качественном уровне. Трудность возникает при постановке вопроса, какое из основных состояний нужно рассматривать при определении «средних по основному состоянию». Если бы использовалось лишь состояние  $|0\rangle$ , то в первом приближении вклад в среднее  $\langle 0 | a_m(t) a_n^*(t') | 0 \rangle$  давали бы только промежуточные состояния  $|e_k^\pm\rangle$ ,  $|e_k^{+1}\rangle$  и  $|e_k^0\rangle$  (но не  $|e_k^{-1}\rangle$ ), поэтому такое приближение кажется несколько искусственным. Однако величина  $\langle k | a_m(t) a_n^*(t') | k' \rangle$  содержит вклады от двух промежуточных состояний  $|e_l^0\rangle$  и  $|e_l^{-1}\rangle$ , причем это справедливо и при  $k=0$  или  $k'=0$ . В высших приближениях во все эти выражения  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$  или  $\langle k | \dots | k' \rangle$  войдут вклады всех возбужденных состояний, но может случиться так, что каждый отдельный вклад при  $N \rightarrow \infty$  стремится к нулю. С физической точки зрения эту трудность понять легко. Физически провести заметное различие между пустым пространством и пространством, в котором имеются инфракрасные световые кванты или голдстоуновские частицы с длиной волны, гораздо большей размеров области, в которой проводится эксперимент, невозможно. Поэтому кажется разумным в качестве основного состояния рассматривать смесь состояний с произвольным числом инфракрасных световых квантов или голдстоуновских частиц. При последовательном удалении частиц полюса двухточечных функций превратятся в точки, из которых начинаются разрезы. Предел длины волны допустимых голдстоуновских частиц будет, однако, зависеть от размеров выбираемой нами области пространства. Видимо, в рамках изучаемой модели все эти усложнения можно разрешить на строгом математическом уровне, но в таком контексте они обсуждаться не будут.

При сравнении модели с реальной ситуацией, существующей в физике элементарных частиц, нужно прежде всего отметить, что отклонение от симметрии в изопространстве элементарных частиц по своей природе несколько непохоже на отклонение от полной вращательной

симметрии в спиновом пространстве модели. В последней не существует симметрии относительно сопряжения частица — античастица. Поэтому в физике элементарных частиц основное состояние нужно представлять скорее как совокупность вещества с большим полным изоспином, направленным в одну сторону, и примерно равного ему количества антивещества, полный изоспин которого направлен в противоположную сторону (подобно этому по сравнению с ферромагнетизмом более хорошей будет являться в определенном смысле слова модель антиферромагнетизма). Точно так же и голдстоуновские частицы в изопространстве должны иметь симметрии, отличающиеся от симметрий блоховских волн в спиновом пространстве.

Совершенно независимо от этой проблемы пригодности модели возникает общий вопрос, в какой степени предположения, относящиеся к симметрии или асимметрии основного состояния, произвольны и насколько они определяются исходным фундаментальным уравнением. Если допустима аналогия между физикой элементарных частиц и квантовой механикой твердого тела, то мы можем предположить, что в качестве решений квантовомеханических уравнений в принципе могут возникать несколько стабильных основных состояний. Термин «стабильный» здесь означает «динамически стабильный» (а не «термодинамически»). Следовательно, определить основное состояние с помощью фундаментального уравнения можно не всегда. С другой стороны, несомненно, что произвольным оно быть не может. Требования непротиворечивости могут допускать для основного состояния «мира» несколько решений, обладающих различными симметриями, — точно так же, как это имеет место в случае квантовомеханических уравнений для твердого тела. Но вряд ли следует ожидать появления непрерывного многообразия решений. Правда, если в случае твердого тела допускается действие внешних сил (например, на его границе действуют напряжения), то это может быть и не так. Но в случае Вселенной понятие «внешней силы» едва ли можно придать какой-нибудь смысл. Поэтому различные возможные основные состояния в определенном смысле соответствуют разным

космологическим моделям в общей теории относительности. Для выбора космологической модели существенны граничные условия; то же самое может быть справедливым и для основного состояния физики элементарных частиц. Кроме них, решить вопрос о возможности того или иного основного состояния может лишь постулат внутренней непротиворечивости.

### § 3. «Спурионный» формализм <sup>1)</sup>

Наряду с другими результатами обсуждение модели ферромагнетика приводит к следующему выводу. Когда основное состояние вырождено и вследствие этого существуют голдстоуновские частицы, которые (если только их энергия достаточно мала) можно добавлять к основному состоянию в произвольном количестве, понятие вакуумных средних и обобщенных функций Грина становится несколько проблематичным.

При вычислении в первом приближении собственных значений масс должен существовать путь, на котором можно пренебречь этими второстепенными эффектами, создаваемыми фотонами и использовать технику обобщенных функций Грина или матричных элементов  $\langle 0 | T \chi(x) \dots | \psi \rangle$  даже для странных частиц. Если в вакуумном среднем вида

$$\langle 0 | \chi(x_1) \chi^*(x_2) \chi(y_1) \chi^*(y_2) \chi(y_3) \dots | 0 \rangle \quad (7.12)$$

координаты  $x_1, x_2$  отделены от других координат  $y_1, y_2, \dots$  большим пространственно-подобным расстоянием ( $|x - y| \gg |x_1 - x_2|$ ), то оставшаяся часть будет содержать члены не только с множителем

$$\langle 0 | \chi_\lambda(x_1) \chi_\mu^*(x_2) | 0 \rangle = \delta_{\lambda\mu} f(x_1 - x_2), \quad (7.13)$$

но также и с множителем типа

$$\langle 0 | \chi_\lambda(x_1) \chi_\mu^*(x_2) | J \rangle = g(x_1 - x_2) \tau_{\lambda\mu}^k T^k \quad (7.14)$$

( $\lambda, \mu$  — изоспиновые индексы). В этом приближении можно считать, что промежуточные состояния  $|J\rangle$  имеют нулевую энергию и импульс, причем они симметричны

<sup>1)</sup> См. работы [78, 79].

относительно собственной группы Лоренца; величины  $T^h$  связаны с изоспиновыми свойствами этих промежуточных состояний.

Если оба вакуума (левый и правый) среднего (7.12) тождественны и для них пренебрегается отклонением от симметрии изопространства, то  $T^h$  является представлением изоспиновой группы, относящимся к некоторым из изоспиновых индексов операторов  $\chi(y_1)\chi^*(y_2)\dots$ . Казалось бы, что в этом случае вклад от членов, входящих с множителем (7.14), устанавливает связь между изоспиновыми индексами в области  $x_1, x_2$  и в области  $y_1, y_2, \dots$ . Но так как величина энергии и импульса промежуточных состояний  $|J\rangle$  линейно убывает с ростом  $|x-y|$ , то их вклад при увеличении расстояния между  $x$  и  $y$  будет уменьшаться как сила далекого действия, — вероятно, как  $1/|x-y|^2$ . Следовательно, эти члены не должны служить помехой причинности.

*Априори* не существует никаких причин, по которым полный изоспин  $T(T+1)$ , связанный с  $T^h$ , принимал бы определенное значение; поэтому может встречаться несколько членов с различными величинами  $T(T+1)$ . Если такие члены в импульсном пространстве содержат полюса, то их можно рассматривать как вклады в двухточечную функцию от странных частиц. Помимо задания оператора  $\chi_\lambda(x)$ , описание этих частиц требует указания изоспиновых индексов, на которые действуют операторы  $T^h$ . Поэтому удобно ввести понятие «спурион» — он не имеет никаких лоренцевых свойств, но обладает свойствами в изопространстве и может «присоединяться» к нормальной частице, образуя странную (аналогично происходящему в модели, описанной в § 2).

Используя это понятие, основное состояние можно представлять как «море» бесконечного числа спурионов и антиспурионов, большинство которых объединено в спурион-антиспурионные пары с нулевым изоспином. Существенной чертой этой картины является асимметрия основного состояния, однако во многих задачах, даже в теории странных частиц, отклонение от вращательной симметрии изопространства может играть весьма несущественную роль и поэтому в первом приближении им можно пренебречь.

Математический формализм, соответствующий такой картине, прежде всего требует определения свойств (точнее, трансформационных свойств) спурионов; тем самым они приобретают некоторые качества частиц. Для интерпретации наблюдаемых явлений, по-видимому, достаточно предположить, что единичный спурион обладает изоспином  $1/2$  и что он имеет калибровочные свойства (т. е. существует различие между спурионом и антиспурионом). Поэтому всего нужно ввести четыре состояния: два спурионных ( $s_1, s_2$ ) и два антиспурионных ( $a_1, a_2$ ). Придерживаясь картины спурион-антиспурионного моря, скажем, что «дырка» должна быть эквивалентна антиспуриону; следовательно, можно определить

$$a_\lambda = c_{\lambda\mu} s_\mu^*, \quad (7.15)$$

где  $c$  дается соотношением

$$- \tau_k = c^{-1} \tau_k^T c. \quad (7.16)$$

В матричном элементе любого оператора спурион  $s_\lambda$ , входящий в бра-вектор (в дираковских обозначениях), будет эквивалентен спурионной дырке  $s_\lambda^*$  в кет-векторе:

$$\langle \dots s_\alpha \dots | \mathbf{O} | \dots s_\beta \dots \rangle = \langle \dots s_\beta^* \dots | \mathbf{O} | \dots s_\alpha^* \dots \rangle. \quad (7.17)$$

Четыре состояния  $s_1, s_2, a_1, a_2$  преобразуются по двумерному представлению группы  $U_2 = G \cdot SU_2$ , где  $G$  означает калибровочную группу числа спурионов, а  $SU_2$  — изоспиновые вращения. Относительно группы Лоренца спурионы свойства не имеют, т. е. по отношению к ней они полностью инвариантны: и относительно собственной группы Лоренца, и относительно дискретных операций  $P$  и  $T$ .

Если исходить из этого определения спурионов, то странную частицу нужно представлять состоящей из нормальной частицы, порождаемой полевым оператором  $\chi(x)$  или произведением таковых, и из одного или нескольких спурионов. Заметим здесь, что полевой оператор  $\chi(x)$  сам имеет изоспиновый индекс. Поэтому можно сказать, что уже  $\chi(x)$  состоит из двух частей, а

именно из оператора, порождающего частицу без изоспина, и из другого оператора, который порождает спурион; эти две части объединяются в один полевой оператор. Наконец, свойства частицы должны зависеть лишь от ее полного изоспина и от калибровочного свойства в изопространстве, т. е. от разности числа спурионов и антиспурионов, входящих в эту частицу. Формальное добавление спурион-антиспурионных пар, не обладающих изоспином, не должно изменять систему. Следовательно, спурионы, возникающие из основного состояния, и спурионы от полевых операторов следует рассматривать на равной основе.

Спурионы, относящиеся к одной и той же пространственно-временной точке, т. е. присоединяемые к одной и той же частице, различить нельзя. Поэтому к спурионам, связанным с одним или несколькими полевыми операторами, которые зависят от одной и той же пространственно-временной точки, следует применять правила статистики Бозе: относительно перестановок изоспиновых индексов, связанных с одинаковыми точками, волновая функция должна быть симметричной. Поэтому изоспины всех спурионов (или всех антиспурионов) в одной и той же точке должны быть параллельными. Это предположение согласуется со свойствами члена взаимодействия, входящего в фундаментальное полевое уравнение (3.1). В фирцевски-симметричном варианте (5.7) этот член содержит выражения

$$1 \cdot 1 - \sigma_k, \sigma_k \text{ в пространстве дираковского спина,} \\ \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{4} \tau_k, \tau_k \text{ в изоспиновом пространстве.}$$

Если дираковские спины параллельны ( $\sigma_k \cdot \sigma_k = +1$ ), то первая строчка обращается в нуль, так что две «голые» частицы могут находиться в одной точке, лишь когда их дираковские спины антипараллельны; вторая строчка исчезает, если антипараллельны изоспины ( $\tau_k \cdot \tau_k = -3$ ). Сталкивающиеся частицы должны иметь параллельный изоспин. Если в данный момент времени изоспины спурионов, относящихся к одной и той же пространственно-временной точке, параллельны, то вследствие уравнения (3.1) это положение вещей сохранится и для любого мо-

мента времени. Спурioны в различных пространственно-временных точках не связаны друг с другом условиями симметрии.

Если странная частица рассматривается как совокупность  $n_s$  спурионов и  $n_a$  антиспурионов, относящихся к одной и той же точке (включая спурионы и антиспурионы, возникающие из полевых операторов), то ее масса должна зависеть от ее полного изоспина  $T$  и ее калибровочного свойства в изопространстве:

$$u = \frac{1}{2}(n_s - n_a). \quad (7.18)$$

Последняя величина отождествляется с гиперзарядом (в литературе гиперзаряд часто обозначается через  $Y=2u$ ). Масса не должна зависеть от  $n_s+n_a$ ; полный изоспин не может быть меньше чем  $|u| : T \geq |u|$ . Собственное значение оператора  $O_{\text{соб}}$ , определяющее массу системы, можно записать через изоспиновые матрицы, относящиеся к спурионам и антиспурионам. Если (в первом приближении) пренебречь членами, включающими больше трех различных изоспиновых матриц, то для согласования с условием (7.17) зависимость оператора  $O_{\text{соб}}$  от изоспина должна определяться формулой

$$O_{\text{соб}} = C \left( \sum_{s=1}^{n_s} \tau_s - \sum_{a=1}^{n_a} \tau_a \right) - f(n_s + n_a). \quad (7.19)$$

Функция  $f(n_s+n_a)$  обязана компенсировать всякую зависимость первого члена от  $n_s+n_a$ . Так как подразумевается, что для спурионов и антиспурионов справедлива статистика Бозе

$$\left( \sum_{s=1}^{n_s} \tau_s \right)^2 = n_s(n_s + 2), \quad \left( \sum_{a=1}^{n_a} \tau_a \right)^2 = n_a(n_a + 2), \quad (7.20)$$

то из (7.19) получаем

$$\begin{aligned} O_{\text{соб}} = & -C \left( \sum_{s=1}^{n_s} \tau_s + \sum_{a=1}^{n_a} \tau_a \right)^2 + 2n_s(n_s + 2)C + \\ & + 2n_a(n_a + 2)C - f(n_s + n_a) = -4CT(T + 1) + \\ & + C(n_s - n_a)^2 + C(n_s + n_a)^2 + 4C(n_s + n_a) - \\ & - f(n_s + n_a) = 4C - [T(T + 1) - u^2] + \text{const.} \quad (7.21) \end{aligned}$$

Кроме изоспина, оператор может зависеть от калибровочного свойства  $u$ , но оно должно появиться лишь в виде  $uB$ , где  $B$  — барионное число. Это следует из того, что  $O_{\text{соб}}$  обязан быть инвариантным относительно  $G$ . Поэтому для собственного значения оператора в первом приближении получаем

$$O_{\text{соб}} = a + b|T(T+1) - u^2| + cBu, \quad (7.22)$$

где, как и в (5.12) или (5.29),  $a$ ,  $b$  и  $c$  будут аналитическими функциями квадрата массы. Формула типа (7.22) для квадрата массы получена Окубо [18] и Гелл-Манном [19] из предположения о существовании в массовом спектре нарушенных  $SU_3$ -мультиплетов; оказывается, что она хорошо согласуется с наблюдаемыми массами. Однако рассматриваемая теория не оставляет места для подобного предположения. Поэтому здесь возникает вопрос о числе уровней в «мультиплете» странных частиц и о том, содержит ли теория, которая следует из уравнения (3.1), некоторое подобие приближенной  $SU_3$ -симметрии.

#### § 4. Странные бозоны

Для бозонов с барионным числом  $B=0$  в (7.22) третий член обращается в нуль. Если, как в случае  $\pi$ -,  $K$ - и  $\eta$ -мезонов, дираковский спин бозонов равен нулю, то уравнение на собственные значения для  $K$ -мезона можно получить сразу из соотношений (5.19) и (5.20), справедливых для нестранных частиц  $\pi$  и  $\eta$ ; их можно использовать для определения двух величин  $a$  и  $b$ , входящих в (7.22). Результат таков: уравнение на собственные значения для  $\pi$ -,  $K$ - и  $\eta$ -мезона имеет вид

$$1 + \frac{3 - T(T+1) + u^2}{4} \left(\frac{\kappa l}{2\pi}\right)^2 q_0(\lambda) = 0. \quad (7.23)$$

Массы, вычисленные из (7.23), достаточно хорошо согласуются с наблюдаемыми величинами. Значение  $\kappa l/2\pi \approx 0,92$ , которое, по-видимому, приближенно удовлетворяет требованию самосогласованности фермионного спектра, дает

	$\pi$	$K$	$\eta$	
$\kappa_B/\kappa$	0,198	0,737	0,827	(7.24)



Абсолютные значения  $\kappa_B/\kappa$  несколько завышены, но их отношение является примерно правильным.

Если к основному состоянию рассматриваемой теории можно последовательно применять спурионный формализм, описанный в предыдущем параграфе, то уравнения (7.22) и (7.23), полученные из (3.1), доказывают существование  $K$ -мезонов с приблизительно правильной массой. Но они не доказывают, что прямое вычисление массы  $K$ -мезона приводит именно к уравнению (7.23) и что нет других странных бозонов со спином 0, которые принадлежат к  $\pi$ - и  $\eta$ -группам. Однако это доказательство можно провести следующим образом.

Собственная функция  $K$ -мезона зависит от трех изоспиновых индексов: два из них возникают из полевых операторов, а один — из добавляемого спуриона. Один из индексов полевых операторов (предположим, что последний) относится к антиспуриону, а два других — к спурионам. Тогда волновая функция  $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$  должна быть симметричной по двум спурионным индексам  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \quad (7.25)$$

(— означает симметрию, а  $\bar{\phantom{x}}$  — антисимметрию). Эту волновую функцию можно разложить на две: одна будет симметрична по  $\beta$  и  $\gamma$ , а другая антисимметрична

$$\varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \quad (7.26)$$

Множители  $\sqrt{3}/2$  и  $1/2$  являются коэффициентами Клебша — Гордана, относящимися к состоянию с изоспином  $T=1/2$ . Соотношение (7.26) можно интерпретировать как утверждение, что с вероятностью  $3/4$   $K$ -мезон состоит из  $\eta$ -мезона, связанного со спурионом, а с вероятностью  $1/4$  — из пиона, связанного со спурионом. Так как в члене взаимодействия уравнения (3.1) добавляемый спурион явно не появляется, то множитель  $q_0(\lambda)$ , имеющийся в уравнении на собственные значения для  $\varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$ , нужно усреднить с коэффициентами  $\eta$ -мезона и пиона, при соответственных весах  $3/4$  и  $1/4$ . Это немедленно возвращает нас к уравнению (7.23).

Если провести те же вычисления для предполагаемого  $K$ -мезонного состояния с изоспином  $3/2$ , то волновая функция была бы полностью симметрична ( $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ ) и поэтому состояла бы лишь из пиона, связанного со спурионом. Тогда собственное значение было бы таким же, как у пиона; следовательно, на самом деле спурион не присоединялся бы к пиону, а был бы свободным спурионом в «море» основного состояния. Согласованность между общим спурионным формализмом предыдущего параграфа и прямым расчетом собственных значений масс можно получить лишь в том случае, если в  $\pi$ - и  $\eta$ -группу добавляется  $K$ -мезон, а не какие-то другие состояния странных частиц. Таким образом, если скомбинировать уравнение (3.1) с вырожденным основным состоянием, то существование октета бозонов спина 0 ( $\pi$ -,  $K$ - и  $\eta$ -мезоны) получает естественное объяснение. Ни в одном пункте этой аргументации не предполагается существование ни  $SU_3$ -симметрии, ни какого-либо приближения, в котором массы  $\pi$ -,  $K$ - и  $\eta$ -мезонов можно было бы считать равными. Тем не менее конечные результаты, а именно существование октета и окубовская [18] массовая формула в определенной степени похожи на следствия нарушенной группы  $SU_3$ .

### § 5. Странные фермионы

Если массы простейших фермионов вычислять из приближения (5.27), то не приходится рассчитывать на возникновение странных частиц. Это связано с тем, что массы частиц получаются здесь за счет рождения и уничтожения фермион-антифермионных пар, лоренцевские свойства которых от изоспина не зависят. Поэтому было бы последовательным предположить, что  $N$ -,  $\Lambda$ -,  $\Sigma$ - и  $\Xi$ -частицы все имеют одну и ту же массу, т. е. что реально спурионы к частицам присоединяться не будут. Однако когда рассматривается усовершенствованное уравнение на собственные значения (5.33), в котором принимаются во внимание рождение и уничтожение бозонов, то возникает другая ситуация. К основному массовому члену, возникающему от непрерывного спектра фермион-антифермионных пар, добавляются вклады от

бозонных полюсов, соответствующие незначительным поправкам; массы бозонов как раз зависят от изоспина. Тот эмпирический факт, что относительное массовое расщепление в фермионном октете  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$  значительно меньше, чем в бозонном, хорошо согласуется с общей идеей о второстепенности поправок, вызванных бозонными полюсами.

Поэтому можно попытаться оценить вклады в уравнение для собственных значений фермионов от рождения и уничтожения бозонов, которым соответствует диаграмма



в уравнении (5.33). При этом для рождения бозонов достаточно использовать феноменологическое описание (6.13), (6.14), приняв в качестве константы связи величину  $f$  из (6.20), вычисленную теоретически. Так как в рамках описываемой теории не было проведено никаких расчетов, относящихся к векторным мезонам, то будут рассматриваться лишь вклады от псевдоскалярных бозонов  $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ .

Если в члене взаимодействия, который входит в (6.13) или (6.14), заменить волновую функцию  $\chi(x)$  интегралом с функцией Грина, возникающим из того же уравнения, то сразу же получится массовый член следующего вида:

$$i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^{\nu}} = \sigma^{\nu} \int d^4x' G(x, x') \sigma_{\mu} \chi(x') \times \\ \times \frac{f^2}{\kappa_B^2} \langle 0 | \frac{\partial \Phi(x')}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^{\nu}} | 0 \rangle + \dots \quad (7.27)$$

или в случае бозона с изоспином 1

$$i\sigma^{\nu} \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^{\nu}} = \sigma^{\nu} \int d^4x' G(x, x') \sigma_{\mu} \chi(x') \times \\ \times \frac{f^2}{\kappa_B^2} \langle 0 | \frac{\partial \Phi_I(x')}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial \Phi_I(x)}{\partial x^{\nu}} | 0 \rangle. \quad (7.28)$$

В импульсном пространстве вклад (7.27) можно записать как

$$\sigma^{\nu} J_{\nu} \chi = \frac{f^2}{\kappa_B^2} (2\pi)^{-4} i \int d^4 p \frac{\sigma^{\nu} p_{\nu} (J-p)_{\rho} \bar{\sigma}^{\rho} \sigma_{\mu} p^{\mu}}{(J-p)^2 (p^2 - \kappa_B^2)} \chi + \dots \quad (7.29)$$

При  $p \rightarrow \infty$  интеграл, входящий в это выражение, расходится.

В нелинейной спинорной теории полюсной член  $(p_{\mu} p_{\nu}) / (p^2 - \kappa_B^2)$  на самом деле возникает так, как это указано в (6.34) и (6.35). Однако выражение (6.36) может в точке  $|x - y| = 0$  не содержать  $\delta$ -функций. Так как двухточечная функция фермионов в первом приближении (3.39) регуляризована двойным полюсом нулевой массы, то естественно предположить, что такая же регуляризация имеет место и в случае бозонной двухточечной функции (6.34). Поэтому (7.29) нужно заменить на

$$\sigma^{\nu} J_{\nu} \chi = f^2 (2\pi)^{-4} i \kappa_B^2 \int d^4 p \frac{\sigma^{\nu} p_{\nu} (J-p)_{\rho} \bar{\sigma}^{\rho} \sigma_{\mu} p^{\mu}}{(J-p)^2 (p^2)^2 (p^2 - \kappa_B^2)} \chi + \dots \quad (7.30)$$

В окрестности полюса  $p^2 - \kappa_B^2 = 0$  это выражение согласуется с (7.29); кроме того, оно дает требуемое поведение (6.34) в окрестности  $|x - y| = 0$ . Здесь нужно подчеркнуть, что регуляризация четырехточечной функции (6.34) не требует обязательного введения в гильбертово пространство идентифинитной метрики или призрачных состояний отрицательной нормы. На самом деле этот член не только содержит вклад связанного состояния  $\kappa_B$ , но должен также включать и поправку, возникающую из-за вклада непрерывного спектра, который существует благодаря силам связи между фермионом и антифермионом. По-видимому, эта поправка будет иметь знак, противоположный вкладу полюса. Регуляризации в (6.34) и в (3.39) должны проводиться поэтому одинаковым способом.

Интеграл, входящий в (7.30), конечен. Для числителя имеем

$$\sigma^{\nu} p_{\nu} (J-p)_{\rho} \bar{\sigma}^{\rho} \sigma_{\mu} p^{\mu} = -2p_{\mu} \sigma^{\mu} (p, J-p) + (J-p)_{\rho} \sigma^{\rho} p^2. \quad (7.31)$$

При интегрировании  $p$  и  $p_\mu \sigma^\mu$  можно заменить их компонентами, параллельными вектору  $J$ :

$$p_{v\parallel} = J_v \frac{(Jp)}{J^2}, \quad (7.32)$$

благодаря чему числитель заменяется выражением

$$\frac{J_v \sigma^v}{J^2} [p^2 J^2 - 2(Jp)^2 + p^2 (Jp)]. \quad (7.33)$$

В итоге вклад (7.30) становится таким:

$$\sigma^v J_v \chi = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{f^2}{4\pi} \right) r \left( \frac{J^2}{\kappa_B^2} \right) \sigma^v J_v \chi + \dots, \quad (7.34)$$

где

$$r \left( \frac{J^2}{\kappa_B^2} \right) = \frac{2i\kappa_B^2}{\pi^2} \int d^4 p \frac{p^2 J^2 + p^2 (Jp) - 2(Jp)^2}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa_B^2) (J - p)^2 J^2}. \quad (7.35)$$

Вычисление  $r(\lambda)$  с помощью фейнмановских методов дает ( $\lambda = J^2/\kappa_B^2$ )

$$r(\lambda) = (2 - \lambda) \ln \lambda + 1 + \frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda} \ln |1 - \lambda|. \quad (7.36)$$

Вклады в уравнение для собственных значений, возникающие от  $\pi$ - и  $\eta$ -мезонов и вычисленные указанным способом, вызывают некоторое изменение массы, но не приводят к какому-либо расщеплению масс  $N$ -,  $\Lambda$ -,  $\Sigma$ -,  $\Xi$ -фермионов. Это связано с тем, что  $\pi$ - и  $\eta$ -мезоны не содержат спурионов, поэтому в выражение



спурионы будут входить просто вместе с фермионами, а от присутствия в фермионах спурионов вклад не зависит.

Однако с появлением вклада от  $K$ -мезонов возникает различие. Спурион может покинуть фермионную линию и войти в  $K$ -мезонную, поэтому присутствие спурионов изменяет вклад от рождения и уничтожения  $K$ -мезонов. Тогда этот член должен содержать множитель общего

вида (7.22), в котором постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются коэффициентами Клебша — Гордана. Вычисления, которые мы проводить здесь не будем, приводят к следующему множителю:

$$\frac{17}{4} - \frac{1}{2} [T(T+1) - u^2] + \frac{10}{3} Bu. \quad (7.37)$$

В конце концов уравнение на собственные значения фермионов становится таким (фиг. 5):

$$\begin{aligned} \sigma^v J_v \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^4 L \left( \frac{J^2}{\kappa^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \frac{\kappa_\eta^2}{\kappa^2} r \left( \frac{J^2}{\kappa_\eta^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\kappa_\pi^2}{\kappa^2} r \left( \frac{J^2}{\kappa_\pi^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{6}{25} \frac{\kappa_K^2}{\kappa^2} \left\{ \frac{17}{4} - \frac{1}{2} [T(T+1) - u^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{10}{3} Bu \right\} r \left( \frac{J^2}{\kappa_K^2} \right) \right] \Phi = 0. \quad (7.38) \end{aligned}$$

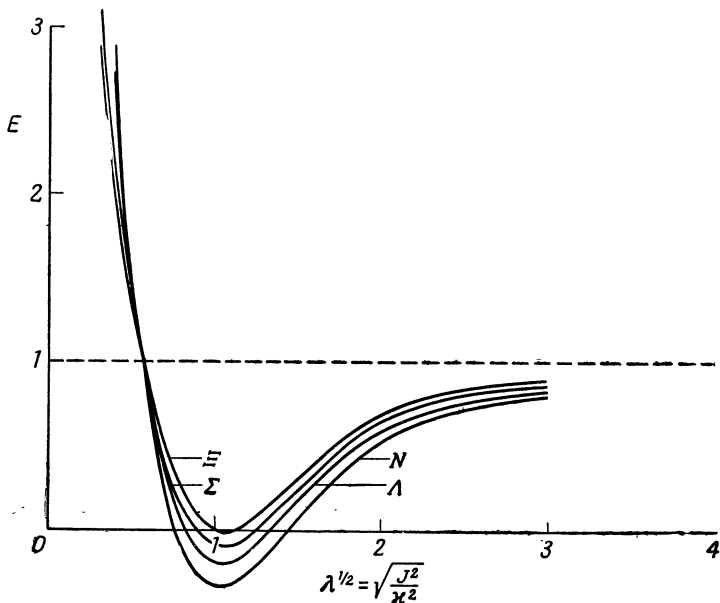
Если взять значение  $\kappa l / 2\pi = 0,92$ , то возникают следующие массы:

	$N$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Xi$
$\kappa_F / \kappa$	0,74	0,81	0,88	1,04
Число добавляемых спурионов	2	1	1	0

(7.39)

Приведенные в этой таблице значения  $\kappa_F / \kappa$  в какой-то степени являются слишком низкими, но их отношение качественно согласуется с наблюдениями. Вклады векторных мезонов в (7.27) или (7.28) не включены; они несколько изменили бы численные значения, но качественная картина, по-видимому, сохранилась бы. Из (7.39) следует, что сам по себе полевой оператор рождает  $\Xi$ -частицу, а не нуклон и что последний в смысле спурионного формализма является двухспурионной системой. Почему этот низший фермион-спурионный мультиплет огра-

ничивается октетом  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ , невозможно интерпретировать столь же просто, как в бозонном случае. Но анализ квантовой электродинамики, который будет проведен в гл. 8, покажет, что для самосогласованности




Фиг. 5. Множитель, входящий в левую часть уравнения (7.38) на собственные значения для странных частиц:

$$E(\lambda) = 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^4 L \left( \frac{J^2}{\kappa^2} \right) - \frac{1}{8} \frac{\kappa_\eta^2}{\kappa^2} r \left( \frac{J^2}{\kappa_\eta^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\kappa_\pi^2}{\kappa^2} r \left( \frac{J^2}{\kappa_\pi^2} \right) - \frac{6}{25} \frac{\kappa_k^2}{\kappa^2} \left\{ \frac{17}{4} - \frac{1}{2} [T(T+1) - u^2] + \frac{10}{3} Bu \right\} r \left( \frac{J^2}{\kappa_k^2} \right).$$

асимметричного основного состояния требуется как раз октет и опять, как и в случае бозонов, не предполагается  $SU_3$ -симметрия. Но массовая формула Окубо имеет своего двойника — соотношение (7.22); кроме того, существует приближение, в котором массы членов октета можно считать равными, а именно уравнение (5.27),

По существу два октета  $\eta$ ,  $K$ ,  $\pi$  и  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$  включают все сильно взаимодействующие состояния, которые можно представить с помощью полевых операторов, взятых в одной и той же точке. Оказывается, что уже векторные бозоны  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $K^*$ ,  $\phi$  являются главным образом  $d$ -состояниями фермион-антифермионной системы; контактное

взаимодействие  значительного вклада в них не дает.

Если те состояния  $\eta$ ,  $K$ ,  $\pi$  и  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ , в которых контактное взаимодействие играет основную роль, имитируют нарушенную  $SU_3$ -симметрию, то благодаря общим требованиям согласованности это же должно быть в некоторой степени справедливо и для высших состояний. Такие возбужденные состояния можно рассматривать как составные системы  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$  и  $\eta$ ,  $K$ ,  $\pi$ , в которых силы конечного радиуса действия, создаваемые виртуальным рождением и уничтожением частиц, играют более важную роль, чем  $SU_3$ -асимметричное контактное взаимодействие. На этой основе без какой-либо непосредственной связи с рассматриваемой теорией и без всяких ссылок на контактное взаимодействие были выполнены расчеты, относящиеся, например, к декуплету  $N^*$ ,  $Y^*$ ,  $\Xi^*$ ,  $\Omega^-$  [128].



КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА <sup>1)</sup>§ 1. Теорема Голдстоуна <sup>2)</sup>

Асимметрия основного состояния по отношению к изоспиновой группе применялась в гл. 7 для объяснения наличия в функциях Грина полюсов странных частиц и как основа спурионного формализма. Теперь объектом нашего исследования будет она сама. Уже в первых работах, посвященных этой проблеме, подчеркивалось, что с эмпирической точки зрения асимметрия основного состояния оказывается тесно связанной с существованием сил далекого действия, т. е. частиц нулевой массы покоя [59, 60]. Асимметрия по отношению к группе изоспина входит через электродинамические силы далекого действия; асимметрия по отношению к пространственному отражению появляется в слабых взаимодействиях, которые являются основными, затрагивающими нейтрино. Можно легко себе представить, что, в то время как короткодействующие силы позволяют четко отделить частицу от остального мира, силы далекого действия могут привести к зависимости свойств частиц от состояния Мира на больших расстояниях.

Эта связь нашла свое математическое выражение в теореме Голдстоуна, которая качественно, причем в несколько обобщенной форме, обсуждалась в § 1 и 2 гл. 7. В рамках рассматриваемой теории теорема Голдстоуна является базисом для понимания квантовой электродинамики. Поэтому общее математическое доказательство теоремы, которое дали Голдстоун, Салам и Вайнберг [81] и Намбу [86], здесь будет проведено для частного случая асимметрии основного состояния по отношению к группе изоспина.

---

<sup>1)</sup> См. работу [114].

<sup>2)</sup> Изложение данного параграфа опирается на работы [80—85].

Сохранение изоспина, которое следует из групповых свойств уравнения (3.1), позволяет построить операторы  $T_k$ , осуществляющие вращения в изопространстве. Для бесконечно малых  $\alpha_k$

$$e^{(i/2) \alpha_k \tau_k \chi} = e^{i \alpha_k T_k} \chi e^{-i \alpha_l T_l}. \quad (8.1)$$

Согласно § 6 гл. 3, эти операторы можно связать с векторными токами  $J_{\mu, k}(x)$ :

$$T_k = \int J_{0, k}(x) d^3x, \quad \frac{\partial J_{\mu, k}(x)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (8.2)$$

В обычных теориях поля эти токи были бы локальными. Но в § 6 гл. 3 было указано, что нелинейная теория, вообще говоря, не допускает построения локальных токов. Поэтому для построения  $J_{\mu, k}(x)$  нужны, по-видимому, полевые операторы, заданные в окрестности точки  $x$  с размерами порядка  $10^{-13}$  см (или  $10^{-23}$  сек). Согласно § 6 гл. 3, построение псевдовектора, удовлетворяющего уравнению непрерывности (8.2), вообще невозможно.

Асимметрия основного состояния может быть выражена тем фактом, что масса фермионов зависит от направления их изоспина, например что  $\Xi^0$  и  $\Xi^-$  имеют разные массы. Если в качестве третьей оси изопространства выбрать направление большого изоспина материи во Вселенной, то для двухточечной функции мы получим

$$\langle 0 | \chi_\alpha^*(y + \varepsilon) \sigma_\nu \chi_\beta(y) | 0 \rangle = \varepsilon_\nu [1_{\beta\alpha} + d(\varepsilon^2) \tau_{3, \beta\alpha}] c(\varepsilon^2), \quad (8.3)$$

где  $\varepsilon$  — конечная разность координат, входящих в определение (8.4). Величина  $d(\varepsilon^2)$  определяется разностью масс  $\Xi^0$  и  $\Xi^-$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — изоспиновые индексы.

Если мы определим бозонные операторы

$$\Phi_{\nu, k}(y, \varepsilon) = \chi^*(y + \varepsilon) \sigma_\nu \tau_k \chi(y), \quad (8.4)$$

то соотношение (8.1) приводит к

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{i \alpha_k T_k} \Phi_{\nu, l}(y, \varepsilon) e^{-i \alpha_m T_m} | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | \chi^*(y + \varepsilon) \sigma_\nu e^{-(i/2) \alpha_k \tau_k \tau_l} e^{+(i/2) \alpha_m \tau_m} \chi(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Полагая  $\alpha_k = (\alpha, 0, 0)$  и сравнивая два члена разложения обеих частей этого соотношения, пропорциональных  $\alpha$  и

$\alpha^2$ , мы получаем два равенства (используется сокращенное обозначение  $ab - ba = [a, b]$ ):

$$\langle 0 | [T_1, \Phi_{v,l}] | 0 \rangle = \langle 0 | \chi^*(y + \varepsilon) \sigma_v \frac{1}{2} [\tau_1, \tau_l] \chi(y) | 0 \rangle, \quad (8.6)$$

$$\langle 0 | [T_1 | T_1, \Phi_{v,l}] | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | \chi^*(y + \varepsilon) \sigma_v \frac{1}{4} [\tau_1 | \tau_1, \tau_l] | \chi(y) | 0 \rangle. \quad (8.7)$$

Согласно (8.3), правая часть равенства (8.6) отлична от нуля при  $l=2$ , а правая часть (8.7) отлична от нуля при  $l=3$ .

Следовательно, представление Челлена — Лемана двух выражений

$$\langle 0 | [J_{\mu,1}(x), \Phi_{v,2}(y, \varepsilon)] | 0 \rangle, \\ \langle 0 | [J_{\mu,1}(x) | T_1, \Phi_{v,3}(y, \varepsilon)] | 0 \rangle$$

удобно изучать в пределе при очень малых значениях  $\varepsilon$ . Если в этих выражениях выписывать лишь член с максимальной сингулярностью при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то из (8.3) мы получим

$$\langle 0 | [J_{\mu,1}(x), \Phi_{v,2}(y, \varepsilon)] | 0 \rangle = \\ = \int d(\kappa^2) \rho(\kappa^2) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Delta(x - y, \kappa) \varepsilon_v \cdot 2id(\varepsilon^2) c(\varepsilon^2) + \dots \quad (8.8)$$

и

$$\langle 0 | [J_{\mu,1}(x) | T_1, \Phi_{v,3}(y, \varepsilon)] | 0 \rangle = \\ = \int d(\kappa^2) \rho(\kappa^2) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Delta(x - y, \kappa) \varepsilon_v 2d(\varepsilon^2) c(\varepsilon^2) + \dots, \quad (8.9)$$

где  $\Delta(x - y, \kappa)$  — швингеровская функция; в обоих случаях мы имеем

$$\int d(\kappa^2) \rho(\kappa^2) = 1. \quad (8.10)$$

С другой стороны, уравнение непрерывности (8.2) дает  $\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 0$ , и поэтому

$$\rho(\kappa^2) = \delta(\kappa^2). \quad (8.11)$$

Спектр масс бозонов, порождаемых операторами  $\Phi_{v,2}(y, \varepsilon)$  или  $\Phi_{v,3}(y, \varepsilon)$ , содержит бозоны нулевой массы покоя, а в этом и заключается содержание теоремы Голдстоуна.

Оператор  $T_1$ , встречающийся в (8.9), коммутирует с полной энергией и импульсом, поэтому он не содержит матричных элементов, соответствующих переходам между состояниями с различными значениями вектора энергии-импульса. Можно сказать, что этот оператор вызывает переходы из основного состояния в «спурионное» [в смысле соотношения (7.5)]. Поэтому вопрос, какой из операторов  $[\Phi_{v,2}(y, \varepsilon)$  или  $\Phi_{v,3}(y, \varepsilon)$ ] следует брать в качестве оператора рождения голдстоуновской частицы, как и в модели § 2 гл. 7, зависит от выбора основного состояния, на которое этот оператор действует. Если в качестве основного состояния выбирается смесь нескольких возможных состояний, что с физической точки зрения кажется наиболее естественным предположением, то наиболее адекватным оказывается представление голдстоуновской частицы посредством проекционного оператора типа (7.5); это связано с тем, что оно с наибольшей ясностью показывает вместе с переносом голдстоуновской частицы отсутствие какого бы то ни было переноса заряда в основном состоянии.

Если для случая изоспина допустимо использование аналогии с моделью § 2 гл. 7, то следует ожидать, что фотонный оператор в изопространстве можно представить проекционным оператором, аналогичным  $\frac{1}{2}(1 - \sigma_z, n)$  из (7.5). Тогда  $\sigma_z$  нужно заменить на  $\tau_3$ , а знак в скобке можно выбрать произвольно. В (7.5) единичный оператор относится к спиновым индексам электронов, находящихся в основном состоянии, т. е. к тем же индексам, что и  $\sigma_z$ . Поэтому в изопространстве единичный оператор должен относиться к калибровочному свойству в этом пространстве (т. е. к свойству, также связанному с основным состоянием), а не к калибровочному свойству в лоренцевом пространстве. Если странные частицы появляются таким путем, который указан в гл. 7, то калибровочное свойство в лоренцевом пространстве отделяется от калибровочного свойства в изопространстве; последнее выражается гиперзарядовым квантовым числом  $u = \frac{1}{2}Y$ . Поэтому мы ожидаем наличия в волновой функции фотона проекционного оператора  $\frac{1}{2}(Y + \tau_3)$ . Этот оператор допускает также симметрию основного состояния относительно зарядового сопряжения — эта

характерная особенность отсутствует в ферромагнитной модели § 2 гл. 7.

Если фотонный оператор содержит указанный член  $\frac{1}{2}(Y + \tau_3)$ , то фотон появляется как смесь (в равной пропорции) состояний изоспина 0 и 1, причем третья компонента изоспина равна нулю. Когда такое состояние является решением уравнения на собственные значения фотона, первоначально должно иметь место вырождение между состояниями с изоспинами 0 и 1, так что указанную смесь будет создавать малое возмущение. Поэтому странные барионы должны быть распределены таким образом, чтобы возникало это вырождение; по-видимому, это и есть то условие, которое порождает хорошо известный барионный октет.

Смесь состояний изоспина необходима для самосогласованности вырожденного основного состояния. Дело заключается в следующем: асимметрия фотона является результатом асимметрии двухточечной функции; в свою очередь асимметрия масс возникает благодаря асимметрии электромагнитных сил, т. е. благодаря порождению и уничтожению фотонов. Если бы при уменьшении асимметричного члена в фотонном уравнении на собственные значения асимметрия фотона также убывала, то при попытке получить самосогласованное решение мы в конце концов пришли бы к полностью симметричному основному состоянию. Самосогласованную асимметрию основного состояния можно создать лишь в том случае, если фотонное состояние асимметрично полностью, т. е. представляет собой смесь в равной пропорции. Этот вопрос более подробно будет обсуждаться в § 3.

Формулы (8.8) — (8.11) не дают какого-либо определенного доказательства, касающегося симметрии голдстоуновских частиц по отношению к преобразованию Лоренца. Так как  $\Phi_{v,3}$  является вектором, то дираковский спин частицы может быть равен 0 или 1. Судя по аналогии с моделью § 2 гл. 7, следовало бы склониться к тому, чтобы считать кулоновскую часть электромагнитного поля, которая представляет смесь скалярного и продольного полей, основным голдстоуновским полем; затем это поле дополняется другими компонентами.

Теорема Голдстоуна имеет другое интересное следствие, относящееся к приближенной  $SU_3$ -симметрии спектра масс элементарных частиц. Если бы исходный закон природы был инвариантен относительно  $SU_3$  и если бы эта симметрия нарушалась основным состоянием (как мы предполагали для изоспиновой группы  $U_2$ , но не для  $SU_3$ ), то должна была бы существовать голдстоуновская частица нулевой массы, ответственная за нарушение  $SU_3$ -группы. Чтобы создать большое отклонение от  $SU_3$ -симметрии, взаимодействие этой частицы должно было бы быть весьма сильным. Эмпирически такая частица не существует. Поэтому исходный закон природы не может быть инвариантным относительно  $SU_3$  или более высоких групп этого типа ( $SU_6$ ,  $U_{12}$  и т. д.). Этот результат является одним из главных аргументов, которые заставляют нас начинать с фундаментального полевого уравнения, в котором не представлена  $SU_3$ . Приближенная  $SU_3$ -симметрия может возникать позже как результат динамики, в особенности как следствие возможности отделения спурионов от большого изоспина основного состояния.

## § 2. Масштабное преобразование

Фотон, подобно всем другим элементарным частицам, должен появляться как собственное решение уравнения (3.1) или, более конкретно, уравнения вида (5.6). Однако такое уравнение, вообще говоря, не будет приводить к нулевому значению массы. Если равенство массы нулю требуется теоремой Голдстоуна, то это должно означать, что асимметрия основного состояния совместно с нулевой массой фотона порождает некоторую новую свободу, которую затем можно использовать с тем, чтобы фотонное уравнение на собственные значения удовлетворялось при нулевой массе. На самом деле эта свобода заключается в свободе выбора средней массы заряженных лептонов.

По-видимому, в квантовой электродинамике масса лептонов имеет чисто электромагнитное происхождение. В недавних работах по электродинамике (см. [113]) подчеркивается, что массу голого электрона нужно брать

равной нулю, и поэтому уравнения электродинамики инвариантны относительно масштабного преобразования:

$$A_\nu(x) \rightarrow \eta A_\nu(x\eta), \quad (8.12)$$

$$\psi(x) \rightarrow \eta^{3/2} \psi(x\eta). \quad (8.13)$$

Эта масштабная инвариантность нарушается основным состоянием, которое вводит конечную массу электрона. Для самосогласованности необходимо, чтобы масса электрона, возникающая из уравнения на собственные значения, совпадала с массой, которая входит в двухточечную функцию основного состояния. Однако, так как с помощью калибровочного преобразования всегда можно перейти от одного значения этой массы к другому, в рамках электродинамики ее определить нельзя. Если в вычисления включаются все заряженные лептоны — электроны и мюоны, то при учете некоторых слабых взаимодействий, возникающих в электродинамике за счет высших приближений, можно определить отношение масс разных лептонов. Но тем не менее сами массы, а значит, и их среднее значение можно изменять как угодно посредством общего масштабного множителя. Следовательно, существует масса покоя, равная нулю, и (в этом смысле) масштабная инвариантность фотона, ответственная за свободу выбора средней лептонной массы. Правдоподобно, что в рассматриваемой теории средняя лептонная масса будет потом определяться фотонным уравнением на собственные значения, т. е. постулатом, что масса покоя фотона есть нуль. Но в самой электродинамике такое определение невозможно. В конце концов фотонное уравнение на собственные значения будет устанавливать соотношение между средней массой заряженных лептонов и спектром масс сильно взаимодействующих частиц.

В рассматриваемой теории, которая основана на уравнении (3.1), ситуация с масштабным преобразованием по существу такая же, как и в квантовой электродинамике. Действительно, фундаментальное уравнение (3.1) инвариантно относительно преобразования (3.11), а коммутатор может иметь вид (3.33). Относительно лоренцева и масштабного преобразования оператор

$\chi^*(x)\sigma_\nu\chi(x)$  ведет себя так же, как и  $A_\nu(x)$ , входящий в (8.12). Кроме того, основное состояние, вводя конечное собственное значение массы, уничтожает масштабную инвариантность.

В приближении (3.39) для двухточечной функции двойной полюс при нулевой массе (ср. § 4 гл. 3) соответствует лептонам и прозрачным состояниям, а полюс  $p^2 - \kappa^2 = 0$  — барионам. Можно сказать, что в этом приближении лептоны отделены от барионов масштабным преобразованием. Как видно из (3.26), лептонная часть сама по себе в действительности была бы инвариантна относительно этого преобразования. Но если масса  $\kappa$  участия в преобразовании не принимает, то барионная часть инвариантной не будет. Указанное разделение означало бы, что число барионов и число лептонов сохраняются независимо. Однако в этом пункте результат весьма тривиален, так как, согласно § 4 гл. 3, в приближении (3.39) лептоны не рождаются и не поглощаются, т. е. не принимают участия в сильных взаимодействиях. Электромагнитной массой заряженных лептонов в (3.39) можно пренебречь; прежде чем сформулировать уравнение на собственные значения фотона, двухточечную функцию в этом пункте нужно усовершенствовать.

### § 3. Собственная функция фотона

Согласно § 2 гл. 5, «собственную функцию» фотона  $\gamma$ , характеризуемого импульсом  $J_\nu$  ( $J^2=0$ ) и поляризацией  $B_\nu$  ( $B_\nu J^\nu=0$ ), в рамках рассматриваемой теории следует определить как  $\tau$ - или  $\phi$ -функцию

$$\Phi_{\alpha\beta}^\mu(x|y) = \langle 0 | T \chi_\alpha^*(x) \sigma^\mu \chi_\beta(y) | \gamma \rangle. \quad (8.14)$$

Мы должны изучить поведение этой собственной функции в изопространстве и в лоренцевом пространстве.

Поведение фотонной собственной функции в изопространстве кратко обсуждалось в § 1. Аналогия с моделью ферромагнетизма предполагает появление здесь проекционного оператора  $1/2(Y + \tau_3)$ :

$$\Phi_{\alpha\beta}^\mu = a^\mu \frac{1}{2} (Y + \tau_3)_{\alpha\beta} \quad (8.15)$$



( $a^\mu$  от изоспина не зависит). Фотон должен быть смесью в равной пропорции состояний изоспина 0 и изоспина 1. Здесь можно снова увидеть, что проекционный оператор  $\frac{1}{2}(1 + \tau_3)_{\alpha\beta}$ , который на первый взгляд мог бы появиться в качестве естественного аналога величины  $\frac{1}{2}(1 - \sigma_z)$  из (7.5), не удовлетворяет необходимым требованиям. Для пренебрежимо малого отклонения от симметрии вырождения между двумя частями изоспина 0 и 1 не существовало бы и поэтому состояние с проекционным оператором  $\frac{1}{2}(1 + \tau_3)$  не являлось бы собственным решением. С другой стороны, фотон должен иметь отношение к калибровочному свойству не в лоренцевом пространстве, а в изопространстве, что определяется и для спурионов основного состояния. Поэтому в (8.15) 1 нужно заменить на  $Y=2u$ . Если в равенстве (8.14) указывать промежуточные состояния и их спурионы более явно, то в правой части этого определения квантовые числа  $u$  и  $T_3$  (третья компонента изоспина) удобно записать в их спурионном представлении (ср. § 3 гл. 7):

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}^\mu(x|x) = & \langle 0 | \chi_\alpha^\dagger(x) \sigma^\mu | s_\delta s_\varepsilon \dots J \rangle \times \\ & \times \langle J s_\delta s_\varepsilon \dots | \chi_\beta(x) | Y \rangle = a_{\beta\delta\varepsilon}^\mu (u + T_3)_{\alpha\delta\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Физическая интерпретация этого соотношения проста. Фотон «состоит» из фермион-антифермионных пар, причем каждый вклад содержит множитель  $u + T_3$ , определяемый симметрией соответствующего фермиона. В октете  $N, \Lambda, \Sigma, \Xi$  этот множитель имеет собственные значения  $\pm 1, 0$ . Нейтральные фермионы, для которых  $u + T_3 = 0$ , вклада в фотонную собственную функцию не дают.

Если подставить (8.16) в фотонное уравнение на собственные значения, то можно увидеть следующее. При условии, что значения  $u$  относительно нуля распределены симметрично (аналогично значениям  $T_3$ ), и в предположении справедливости (8.16) два вклада в фотонную собственную функцию, возникающие от слагаемого  $u$  (изоспин 0) и от  $T_3$  (изоспин 1), на самом деле сначала вырождены. Для октета  $N, \Lambda, \Sigma, \Xi$  симметрия удовлетворяется; однако если добавить другие фермионы, например с изоспином  $3/2$ , то это не имело бы места. Поэтому самосогласованное решение, для которого

основное состояние асимметрично по отношению к группе изоспина, возможно как раз тогда, когда наряду со специальной симметрией (8.16), относящейся к фотону, существует фермионный октет.

Множитель

$$q = u + T_3 \quad (8.17)$$

решает вопрос об участии в собственной функции фотона фермион-антифермионной пары, а следовательно, и о взаимодействии фермиона (или антифермиона) с фотоном. Поэтому мы имеем право назвать его квантовым числом электромагнитного заряда фермиона. Из (8.17) мы заключаем, что в согласии с хорошо известным эмпирическим правилом, полученным Гелл-Манном и Нишиджимой [8], заряд  $q$  состоит из двух частей — из гиперзаряда  $u$  и изоспинового заряда  $T_3$ . Тогда аддитивность заряда в уравнениях Максвелла будет доказывать правильность этого утверждения и для любых более сложных систем. Любопытно, что соотношение, подобное правилу Гелл-Манна — Нишиджимы, существует уже в ферромагнитной модели [см. (7.5)].

Согласно (5.11) и более общей формуле

The diagram shows a fermion loop (a circle with a dot) with a photon line (a wavy line) attached to it. The photon line is connected to the loop at two points, forming a figure-eight shape. The diagram is labeled with an equals sign and another similar diagram, indicating an identity or a specific contribution to a process.

по своим лоренцевским свойствам собственная функция фотона (дираковский спин 1) по существу определяется соотношением

$$\varphi^\mu(x|y) \sim \text{const} \cdot e^{-iJy} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \times \\ \times (u + T_3) \frac{\text{Sp} [\sigma^\mu p_\rho \bar{\sigma}^\rho \sigma_\nu B^\nu (J - p)_\tau \bar{\sigma}^\tau]}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2) (J - p)^2}. \quad (8.18)$$

Но, как упоминалось в предыдущем параграфе, может возникнуть необходимость уточнить положение полюсов, приняв во внимание электромагнитные массы, в особенности массы лептонов. Выражение (8.18) можно сравнить с соответствующим выражением из обычной квантовой электродинамики, когда мы заменяем спинор  $\chi(x)$

дираковским спинором  $\psi(x)$ , который порождает электроны или мюоны, и пренебрегаем тяжелыми частицами. В первом порядке теории возмущений для членов высшей степени по  $p$  получим

$$\varphi^\mu(x|y) \sim \text{const} \cdot e^{-iJy} \int d^4p \times \\ \times \frac{\text{Sp} [\gamma^\mu p_\rho \gamma^0 \gamma_\nu B^\nu (J-p)_\tau \gamma^\tau]}{(p^2 - \mu^2) [(J-p)^2 - \mu^2]} e^{-ip(x-y)}, \quad (8.19)$$

где  $\mu$  — масса электрона (или мюона). Однако при сравнении с (8.18) нас интересуют не результаты теории возмущений, а точные выражения, имеющие место для перенормированных операторов. При  $x=y$  выражение (8.19) сводится к собственнo-энергетическому интегралу фотона, который, как хорошо известно, квадратично расходится. Чтобы устранить эту бесконечную собственную энергию фотона, обычно доказывают, что из-за калибровочной инвариантности теории в (8.19) следует вычестть член того же самого вида при  $J=0$ , т. е.

$$\frac{\text{Sp} [\gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu B_\rho \gamma^0 p_\tau \gamma^\tau]}{(p^2 - \mu^2)^2}. \quad (8.20)$$

Тем самым квадратичная расходимость превращается в логарифмическую, которая затем в процессе перенормировки превратится в сходящееся выражение, и поэтому главный член (с максимальной степенью  $p$ ) можно записать в виде

$$\frac{\text{Sp} [\gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu B_\rho \gamma^0 p_\tau \gamma^\tau]}{(p^2 - \mu^2)^2 [(J-p)^2 - \mu^2]}. \quad (8.21)$$

Если сравнить (8.18) и (8.21), то будет видно, что матрицы  $\gamma^\mu$  обычной квантовой электродинамики в рассматриваемой теории заменяются на  $\sigma^\mu$ ; это происходит благодаря тому, что здесь используется двумерное представление группы Лоренца. Но это различие несущественно; оно исчезло бы, если бы мы вместо (3.1) исходили из уравнения (3.22). Кроме того, имеющийся в (8.18) двойной полюс при нулевой массе ( $p^2=0$ ) (он появляется в правой части благодаря линии  $\text{---}\bigcirc\text{---}$ ) в (8.21) заменяется на полюс при массе заряженных лептонов; эту

же замену нужно совершить и в случае другого полюса  $(J - p)^2 = 0$ , который появляется там же благодаря функции Грина. Наконец, знаменатель выражения (8.18) содержит множитель  $p^2 - \kappa^2$ , который делает интеграл сходящимся, в то время как (8.21) логарифмически расходится (это выражение будет сделано сходящимся в последующем процессе перенормировки).

Поскольку для фотона выбирается та же степень приближения, что и для других бозонов (§ 1 гл. 5), будет логичным улучшить двухточечную функцию  $\text{---} \circ \text{---}$ , входящую в (8.18), учитывая электромагнитную массу заряженных лептонов. Так как в этом приближении у нас нет никакого способа для вычисления отношения масс разных заряженных лептонов, то мы будем заменять их массу на среднюю лептонную массу  $\mu$ . Если сдвинуть двойной полюс к этому конечному значению массы, то исчезнет сингулярность, обсуждавшаяся в § 2 гл. 5, так как при условии сохранения энергии и импульса световой квант не может распасться на пару частиц, из которых по крайней мере одна обладала бы конечной массой. В функцию Грина метод Тамма — Данкова никакого конечного значения массы не вводит; этого же мы будем придерживаться и здесь. Если сдвинуть полюс  $(J - p)^2 = 0$  к средней лептонной массе, то получающиеся численные значения изменились бы очень слабо.

Итак, в конце концов (8.18) нужно заменить выражением

$$\begin{aligned} \Phi^\mu(x|y) \sim \text{const} \cdot e^{-iJy} \int d^4p \times \\ \times \frac{\text{Sp} [\sigma^\mu p_\rho \bar{\sigma}^\rho B_\nu \sigma^\nu (J - p)_\tau \bar{\sigma}^\tau]}{(p^2 - \mu^2)^2 (p^2 - \kappa^2) (J - p)^2} e^{-ip \cdot (x-y)} (u + T_3). \end{aligned} \quad (8.22)$$

#### § 4. Фотонное уравнение на собственные значения и константа связи

Первоначальное вырождение между  $u$ - и  $T_3$ -частями собственной функции фотона показывает, что в первом приближении за уравнение на собственные значения можно принять просто (5.22). Но при этом функция  $q_1(\lambda)$  заменяется на  $q_1(\lambda, \epsilon)$  (где  $\epsilon = \mu^2/\kappa^2$ ); последняя отли-

чается от  $q_1(\lambda)$  положением двойного полюса двухточечной функции — он передвигается из нуля к средней лептонной массе  $\mu$ . Аналитическое выражение для  $q_1(\lambda, \varepsilon)$  таково:

$$\begin{aligned} q_1(\lambda, \varepsilon) &= q_1(\lambda) - q_1\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda}{\varepsilon}(1 - \varepsilon) \frac{dq_1(\lambda/\varepsilon)}{d(\lambda/\varepsilon)} = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1-\varepsilon}{\lambda} (1 - 2\varepsilon + 2\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2(1+2\lambda)}{\lambda^2} \ln|1-\lambda| - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} (3 - 2\varepsilon) \ln\left|\frac{\varepsilon-\lambda}{\varepsilon}\right| + (3 - 2\lambda) \ln|\varepsilon - \lambda| \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

В предельном случае  $\lambda \ll \varepsilon \ll 1$  его можно упростить:

$$q_1(\lambda, \varepsilon) \approx \ln|\varepsilon - \lambda| + 1 + \frac{\lambda}{3\varepsilon} + \dots \quad (8.24)$$

Наконец, уравнение на собственные значения имеет вид

$$1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2 q_1(\lambda, \varepsilon) = 0. \quad (8.25)$$

Его должно быть достаточно для определения средней массы  $\mu$  заряженных лептонов и константы связи, которая для фотонов совпадает с зоммерфельдовской постоянной тонкой структуры.

Для численных расчетов константу  $\kappa l/2\pi$  (которая известна не очень точно) удобно исключить путем сравнения (8.25) с уравнением на собственные значения пиона (5.20). Так как в случае фотона  $\lambda=0$ , из (5.20) и (8.25) мы получим

$$q_0(\lambda)_{\text{пион}} = q_1(0, \varepsilon). \quad (8.26)$$

Используя (8.24) и разложение

$$q_0(\lambda) \approx \ln \lambda - \frac{3}{2} \quad \text{при } \lambda \ll 1, \quad (8.27)$$

будем иметь

$$\ln \lambda_{\text{пион}} - \frac{3}{2} \approx \ln \varepsilon + 1, \quad (8.28)$$

$$\varepsilon = \lambda_{\text{пион}} e^{-5/2}, \quad (8.29)$$

а использование эмпирического значения  $\kappa_{\text{пион}} \approx 140 \text{ Мэв}$  дает

$$\mu = \frac{\kappa_{\text{пион}}}{3,5} \approx 40 \text{ Мэв}. \quad (8.30)$$

Так как до сих пор не известно, какого типа среднее значение электронной и мюонной массы должно выбираться, эта величина находится в разумном согласии с экспериментом.

Теорию константы связи можно взять прямо из § 2 гл. 6. Обозначая константу связи фотона через  $e$  (вместо  $f$ ), из (6.29) мы получаем

$$\frac{e^2}{4\pi} = - \frac{\pi}{\{\partial q_1(\lambda, \varepsilon)/\partial \lambda\}_{\lambda=0}} = \frac{3\pi}{2} \varepsilon = 0,386 \frac{\kappa_{\text{пион}}^2}{\kappa^2}. \quad (8.31)$$

Величина  $e^2/4\pi$  (соответствующая в старых обозначениях  $e^2/\hbar c$ ) тождественна зоммерфельдовской постоянной тонкой структуры [115]. Подстановка в (8.31) эмпирических значений масс пиона и нуклона дает

$$\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{120} \quad (8.32)$$

в удовлетворительном согласии с эмпирической величиной  $1/137$ .

Благодаря тому что знак  $\{\partial q_1(\lambda, \varepsilon)/\partial \lambda\}_{\lambda=0}$  отрицателен, норма фотонного состояния положительна (ср. § 2 гл. 6). Поэтому фотон в противоположность бозонам спина 1 из гл. 5 является реальной частицей, а не призрачным состоянием.

## § 5. Особые свойства фотона и электромагнитного поля

Равенство нулю массы покоя фотона приводит к некоторым упрощениям, которые отсутствуют в случае других бозонов и составляют характерную особенность электродинамики.

В члене взаимодействия фундаментального полевого уравнения (3.1) содержатся матричные элементы, представляющие взаимодействие поля  $\chi(x)$  с фотонным полем (8.14). Их можно записать в форме, которая используется в феноменологической теории:

$$-i\sigma_\nu \frac{\partial \chi}{\partial x_\nu} + eq\sigma_\nu \chi A^\nu + \dots = 0, \quad (8.33)$$

где  $q$  — зарядовое квантовое число (8.17). Если считать, что матричные элементы уравнения (8.33) относятся к рождению фермионов с импульсом  $p_\mu$ , то в качестве промежуточных состояний в члене взаимодействия можно взять состояния с импульсом  $p_\mu - J_\mu$ ; тогда  $A^\nu$  порождает фотон импульса  $J_\mu$ . Если  $p_\mu$  расположен вблизи массовой оболочки существующего фермиона массы  $m_F$  ( $p^2 - m_F^2 = 0$ ), то (поскольку благодаря равенству  $J^2 = 0$   $J_\mu$  можно выбрать сколь угодно малым) вектор  $p_\mu - J_\mu$  может быть выбран так, чтобы он также находился в непосредственной близости от массовой оболочки. Поэтому и оператор  $\chi$  в члене взаимодействия относится к той же частице. Следовательно, связь не зависит от количества «свободных полей» массы  $m_F$ , которые присутствуют в полевом операторе  $\chi(x)$ , так как эти операторы в обоих членах уравнения (8.33) могут относиться к одной и той же бесконечно малой окрестности массовой оболочки  $m_F$ . Для вычисления связи одевание фермионных линий, входящих в (6.16), совершенно не важно. В обычной квантовой электродинамике этот факт выражается тождеством Уорда [116]. Для наших целей достаточно из (8.33) сделать заключение, что электромагнитное взаимодействие универсально. Это следует понимать так, что за исключением квантового числа  $q$  [которое для фермионов, содержащихся в  $\chi(x)$ , имеет собственные значения  $\pm 1, 0$  и входит в качестве множителя], для всех этих фермионов взаимодействие является одним и тем же; поскольку, согласно (2.14), все операторы, порождающие стационарные состояния, можно построить из произведений  $\chi(x)$  и  $\chi^*(x)$  и поскольку из уравнений Максвелла следует аддитивность заряда, видно, что все электрические заряды должны быть кратны элементарному заряду  $e$ ; даже лептоны, которые из-за своей двойной полюсной природы в (3.39) не обладают непосредственным взаимодействием с бозонами, подобными  $\eta$ - или  $\pi$ -мезону, имеют с фотонами те же самые взаимодействия, что и барионы. Универсальность электромагнитного взаимодействия является следствием того, что масса покоя фотона равна нулю.

Электромагнитный ток можно получить в качестве следствия уравнений Максвелла, которое возникает из

симметрии фотона и из структуры вершины фотонного взаимодействия:

$$q = \int d^3x J_{0,q}(x) \text{ и } \frac{\partial J_{\mu,q}(x)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (8.34)$$

Величина  $J_{\mu,q}(x)$  является векторным током, аналогичным  $J_{\mu,\chi}(x)$ , и подобно последнему может зависеть от полевых операторов  $\chi(x)$ , взятых в конечной окрестности точки  $x$ . Снова становится возможным представление типа (3.61); но эта возможность зависит от сингулярности двухточечной функции вблизи начала координат, которая в настоящий момент известна недостаточно хорошо.

## § 6. Лептонные массы

Лептоны, появляющиеся в приближенной двухточечной функции (3.39) в качестве двойных полюсов, в сильных взаимодействиях участия не принимают. Следовательно, в этом приближении их масса возникает благодаря взаимодействию с фотонами. С другой стороны, электромагнитное взаимодействие оставляет масштабный множитель неопределенным, а это существенно для фотонного уравнения на собственные значения, которое содержит информацию, относящуюся к массам лептонов. Когда в первом приближении барионный октет представляется одним простым полюсом, то здесь нельзя ожидать большего, чем определение средней лептонной массы.

Если мы хотим пойти дальше, то прежде всего нужно отметить следующее: вид (8.16) фотонной собственной функции в изопространстве означает, что она состоит из одинаковых вкладов заряженных барионов, входящих в октет, согласно формуле

$$\varphi \sim \text{const} \cdot (\rho\bar{\rho} + \Sigma^+\bar{\Sigma}^+ - \Sigma^-\bar{\Sigma}^- - \Xi^-\bar{\Xi}^-). \quad (8.35)$$

Фотонное уравнение на собственные значения (4.22)



можно записать как

$$\varphi = FG \cdot \text{вершина} \cdot \varphi. \quad (8.36)$$



Как показывает прямой расчет, вершинная часть от члена взаимодействия уравнения (3.1), действующая в пространстве барион-антибарионных пар, которые содержатся в октете, умножает  $\varphi$  на постоянный множитель и оставляет форму (8.35) неизменной. Однако множители  $FG$  зависят от масс, и поэтому, если  $F$  будет относиться к разным барионным массам, регуляризованным одной и той же лептонной массой, эти множители вид функций (8.35) нарушают. Чтобы (8.35) и (8.36) были справедливы одновременно, нужно потребовать равенства четырех множителей  $FG$ , относящихся к четырем массам  $P$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^-$ . Этого можно добиться, лишь предположив, что для регуляризации используются по крайней мере две лептонные массы — одна относится к  $P$ , а другая — к  $\Xi^-$ . Тогда члены  $FG$  для  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  можно привести к правильным значениям, если в функции  $F$  использовать смесь (примерно поровну) двух видов лептонов.

Массы этих двух лептонов определяются простым требованием, чтобы множитель  $FG$  для протона или  $\Xi^-$  имел бы такое же значение, как и множитель  $FG$ , вычисленный в § 4 для средней барионной и для средней лептонной масс. Проводя эти расчеты, мы будем предполагать, что для обоих барионов (протона и  $\Xi^-$ )  $F$  имеет одинаковую аналитическую форму

$$F_{\text{бар}} = (2\pi)^{-4} \omega_{\text{бар}} \int d^4 p \left( \frac{\kappa_{\text{бар}}^2 - \mu^2}{p^2 - \mu^2} \right)^2 \frac{p_\nu \bar{\sigma}^\nu}{-p^2 + \kappa_{\text{бар}}^2} e^{-ip(x-x')}, \quad (8.37)$$

где вес  $\omega_{\text{бар}}$  должен определяться вычетом в полюсе  $p^2 = \kappa_{\text{бар}}^2$ , имеющимся в полной двухточечной функции (4.18). Из (4.18) получаем

$$\omega_{\text{бар}} = \left[ \frac{\mathcal{M}(p^2)}{p^2 \mathcal{L}'(p^2)} \right]_{p^2 = \kappa_{\text{бар}}^2}. \quad (8.38)$$

Тогда уравнение на собственные значения (8.25) для определения массы лептона заменяется на

$$1 + \frac{1}{4} \left( \frac{l\kappa_{\text{бар}}}{2\pi} \right)^2 \omega_{\text{бар}} q_1(0, \varepsilon) = \\ = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 \frac{\mathcal{M}(\kappa_{\text{бар}}^2)}{\mathcal{L}'(\kappa_{\text{бар}}^2)} q_1(0, \varepsilon) = 0, \quad (8.39)$$

где  $\varepsilon = (\mu/\kappa_{\text{бар}})^2$ , а  $\mu$  — масса лептона, относящаяся к этому бариону (протону или  $\Xi^-$ ). Величину  $\mathcal{L}'$  можно взять из фиг. 3 и из (7.38)

$$\mathcal{L}' = \frac{\partial \mathcal{L}(p^2)}{\partial (p^2)} = - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial E}{\partial \lambda}. \quad (8.40)$$

Здесь  $\kappa$  — средняя масса октета ( $\sim 1150$  Мэв). На данной стадии теории функция  $\mathcal{M}(p^2)$  известна плохо. Сложные интегралы, входящие в (4.30), еще не вычислены, а (5.30) допустимо считать разумным приближением лишь в том случае, если правая часть этого уравнения хотя бы качественно согласуется с (4.30). Однако легко сделать два весьма различных упрощающих предположения, причем истинное поведение  $\mathcal{M}(p^2)$  должно лежать где-то посередине. Можно принять, что для различных барионных масс октета значения  $\mathcal{M}(p^2)$  должны быть приближенно равны. С другой стороны, из (5.30) можно предположить, что при  $\lambda$ , определяемом вторым нулем функции  $E(\lambda)$ ,  $F(p^2)$  исчезает, так как в этом случае полюса у  $F(p^2)$  быть не должно; поэтому в барионном полюсе функции  $F(p^2)$  величина  $\mathcal{M}(p^2)$  должна быть приближенно пропорциональна разности между значениями  $p^2$  в полюсе и во втором нуле  $E(\lambda)$ . В табл. 1 и 2 эти два случая будут различаться символами I и II. Из-за близости на фиг. 5 минимума функции  $E(\lambda)$  к точке пересечения, соответствующей  $\Xi$ , для этой частицы рассматриваемые величины являются весьма неопределенными; поэтому «среднее» значение, фигурирующее в табл. 1, получается в результате усреднения величин, соответствующих  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -барионам. С точностью до постоянного множителя табл. 1 дает вычисленные веса  $w_{\text{бар}}$ , умноженные на  $\kappa_{\text{бар}}^2$ ; если, как в (8.26), массы лептонов вычисляются путем сравнения с массой пиона, то этот постоянный множитель несуществен.

Таблица 1

$w_{\text{бар}} \kappa_{\text{бар}}^2 \text{ const}$	$\Xi$	$\Sigma$	Среднее	$\Lambda$	$N$
I	11,35	1,6	1,22	0,848	0,421
II	1,395	1,27	1,12	0,974	0,636

Теперь массы двух лептонов можно вычислить из уравнения

$$(\omega_{\text{бар}} \kappa_{\text{бар}}^2)_{\text{ср}} q_0(\lambda_{\text{пион}}) = (\omega_{\text{бар}} \kappa_{\text{бар}}^2) q_1(0, \varepsilon), \quad (8.41)$$

которое заменяет (8.26).

Используя численные значения, приведенные в табл. 1, для масс (выраженных в Мэв) двух лептонов, получаем

Таблица 2

	$\Xi^-$	$\rho$
I	590	0,14
II	80	3,6
Эксперимент	105,66	0,511

Лептон, который регуляризует  $\Xi^-$ , можно отождествить с мюоном, а другой лептон, регуляризующий протон, — с электроном. Несмотря на весьма широкий разброс результатов, полученных при двух крайних упрощениях I и II, теория дает качественное приближение к массам лептонов. Члены  $FG$  фотонного уравнения на собственные значения, которые соответствуют  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , могут быть регуляризованы «смесью» двух лептонов.

На данной стадии теории сделать вывод о существовании других лептонов нельзя. Если пренебречь слабыми взаимодействиями, то единственным процессом, порождающим или уничтожающим лептоны, является рождение или уничтожение пар фотонами, поэтому для каждого вида лептонов лептонное число сохраняется по отдельности. Для более полного понимания лептонов необходимо провести более совершенный анализ функций  $\mathcal{L}(p^2)$ ,  $\mathcal{M}(p^2)$  и  $E(\lambda)$ , основанный на уравнениях (4.29), (4.30) и (7.38).

## СВЯЗЬ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИМИ ТЕОРИЯМИ

### § 1. Так называемый метод бутстрепа<sup>1)</sup>

В контексте нашего рассмотрения термин «феноменологическая теория» будет применяться к такой теории, которая пробует увязать различные эмпирические данные на некоторой теоретической основе, но не пытается явно сформулировать исходный закон природы. Теории такого типа могут весьма успешно описывать наблюдаемые явления, а с течением времени они могут возникать как следствие определенного приближения, примененного в полной теории. В качестве общеизвестного исторического примера упомянем описание планетарных орбит в астрономии Птолемея с помощью циклов и эпициклов. Впоследствии циклы и эпициклы оказалось возможным интерпретировать как первые члены фурье-разложения истинных ньютоновских орбит.

Используемый ныне в физике элементарных частиц метод бутстрепа опирается на те интуитивные идеи, что элементарную частицу можно считать состоящей из других, что в благоприятных случаях из множества возможных комбинаций такого рода одну можно выбрать в качестве наиболее важной и что среди всевозможных взаимодействий соответствующих частиц лишь одно определенное будет оказывать наибольшее влияние. Изучение аналитического поведения  $S$ -матричных элементов, относящихся к этим наиболее важным вкладкам, может привести к соотношениям между разными массами; шаг за шагом их можно использовать для того, чтобы улучшить значения констант; кроме того, возможна проверка экспериментом. В благоприятных случаях этого окажется достаточно для определения отношений масс и констант связи.

---

<sup>1)</sup> По теме этого параграфа см. [117].

Хорошо известным примером применения метода бутстрепа является анализ взаимодействия между пионами и  $\rho$ -мезонами. Таким приближением может быть рассмотрение  $\rho$ -мезона как частицы, состоящей из двух пионов. Среди сил, связывающих два пиона, наиболее важны те, которые обусловлены обменом одним  $\rho$ -мезоном. В этом случае имеются, по существу, лишь две неизвестные константы — отношение масс пиона и  $\rho$ -мезона и константа связи в п-р-вершине; они должны определяться соотношениями между  $S$ -матричными элементами.

В рамках единой теории поля, основанной на уравнении (3.1), эту схему можно понимать как результат учета некоторых определенных фейнмановских диаграмм, которые появляются в высших приближениях метода Тамма — Данкова. Действительно, из (3.1) для  $\rho$ -мезона можно получить уравнение на собственные значения такого типа

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (9.1)$$

Оно соответствует рецепту метода бутстрепа. Однако остается непонятным, почему диаграмма (9.1) должна быть гораздо более важной, чем множество других возможных диаграмм. В подобной ситуации существует лишь общий аргумент, что для поведения функций по сравнению с полюсами и разрезами при больших массах гораздо более важны полюса при низких значениях масс; а надо отметить, что в двух бозонных октетах распасться на два пиона может только  $\rho$ -мезон. Видимо, совершенно невозможно определить заранее, какую именно степень приближения можно получить при выборе одной такой диаграммы типа (9.1).

В принципе, конечно, в бутстрепный формализм можно включить большое число всевозможных комбинаций частиц и процессов, совместимых с предполагаемой

симметрией. Тогда степень сложности будет весьма близка к той, которая имеет место в аналогичном высшем приближении метода Тамма — Данкова. Можно ли в действительности выполнить расчеты на такой основе — другой вопрос.

Бутстрепный формализм, интерпретируемый таким весьма общим образом, в своей основе может быть эквивалентен единой теории поля, исходящей из уравнения (3.1); но это будет в том (и только в том) случае, если он отправляется от той же самой групповой структуры. На самом деле наряду с групповой структурой и (3.1) и бутстрепный формализм содержат еще принцип релятивистской причинности. Уравнение (3.1) формулирует его своим локальным дифференциальным характером, а метод бутстрепа — утверждениями, касающимися аналитического поведения  $S$ -матричных элементов, которые косвенно берутся опять-таки из теории поля. Включение в бутстрепный формализм электродинамики и нарушения симметрий основным состоянием может оказаться в какой-то мере сложным, но не должно быть принципиально невозможным.

## § 2. Аналитическое поведение $S$ -матричных элементов

Единая теория поля предполагает существование асимптотических состояний и унитарной  $S$ -матрицы. Аналитическое поведение  $S$ -матричных элементов ограничивается условием его совместности с релятивистской причинностью — в той степени, в которой она следует из локального дифференциального уравнения (3.1). Для описания экспериментов, по-видимому, достаточно этой степени причинности. Аналитическому поведению она может предоставлять несколько большую свободу, чем мандельштамовские или другие обычные дисперсионные соотношения [28—36], но это, вероятно, несущественно. Поэтому мы ожидаем, что наиболее важная часть следствий дисперсионной теории должна получаться и из единой теории поля. В ней могут существовать некоторые особенности, которые возникают благодаря специальному методу регуляризации, применяемому в приближенной двухточечной функции (3.39). В согласии с обычной квантовой электродинамикой регуляризация

осуществляется двойным полюсом при лептонных массах. При обычном подходе к дисперсионным проблемам полюса (или двойные полюса) при лептонных массах и полюса (или разрезы), соответствующие наличию фотонов, не рассматриваются. В том приближении, в котором электродинамическими задачами можно пренебречь, различие, вероятно, мало.

Что касается проблемы полюсов Редже [118], то следует подчеркнуть, что в единой теории поля все полюса, соответствующие стационарным состояниям, должны относиться к реджевскому типу, поскольку все стационарные состояния можно интерпретировать как связанные, состоящие из других (не обязательно более мелких) элементов. Единственным исключением могут быть нейтрино, которые не принимают участия во всех обычных взаимодействиях. Но если мы учтем и слабые взаимодействия, то в качестве связанных состояний могут появляться даже нейтрино.

### § 3. Приближенные симметрии ( $SU_3$ , $SU_6$ и т. д.) <sup>1)</sup>

Эмпирический спектр элементарных частиц содержит некоторое число широких мультиплетов (ср. § 4 и 7 гл. 1), которые можно интерпретировать как результат приближенной инвариантности исходного закона природы относительно группы  $SU_3$ . Если в теоретико-групповой анализ включается и дираковский спин частиц, то некоторые из этих мультиплетов можно объединить в более крупные семейства частиц, рассматривая их как большие мультиплеты, порожденные более высокими приближенными симметриями типа  $SU_6$ ,  $U_{12}$  и т. д. В отличие от точных симметрий, возмущаемых асимметричным основным состоянием, эти симметрии являются приближенными, по-видимому, с самого начала. Это связано с тем, что не наблюдается никаких «голдстоуновских частиц» (бозонов нулевой массы покоя), которые могли бы быть ответственными за большие отклонения от предполагаемой симметрии. Поэтому возникает общий вопрос, можно ли понять такие приближенные симметрии из специального уравнения (3.1), которое, по-видимому, не

<sup>1)</sup> См. работы [16, 17].

содержит каких-либо непосредственных указаний на высшие группы, такие, как  $SU_3$ ,  $SU_6$  и т. д.


Для общего понимания этой ситуации, может быть, следовало бы начать с такого утверждения: «любой простой объект, который строго симметричен относительно некоторой группы  $g$ , при достаточном числе степеней свободы будет с большой вероятностью приближенно симметричен и относительно более широких групп  $G$ , содержащих  $g$  в качестве подгруппы». Это утверждение не является каким-то математическим законом, а служит некоторым общим правилом, допускающим исключения. Его смысл можно объяснить на примере симметрий картинок, создаваемых в калейдоскопе. Предположим, что зеркала калейдоскопа гарантируют точную гексагональную симметрию картинки и, кроме того, что образующие ее кусочки битого стекла распределены там более или менее хаотически. Тем не менее зачастую мы наблюдаем более высокие приближенные симметрии, например окружности приятных оттенков или двенадцатиугольные картинки. Исходная гексагональная симметрия является подгруппой группы симметрии окружности или двенадцатиугольника. Можно упомянуть и другой пример: ваза, выполненная в виде цилиндрического сосуда, высота и диаметр которого различаются не очень сильно, вполне может обладать приближенной сферической симметрией. Могут иметь место большие отклонения от высшей симметрии, но, несмотря на это, распознать ее легко. Поэтому следует подчеркнуть, что если отклонения от таких приближенных симметрий велики, то их утверждения являются весьма слабыми. Третий пример можно взять из области атомной физики. Уравнение Шредингера для тяжелого атома строго инвариантно относительно пространственных вращений; но оно не инвариантно относительно независимых вращений, связанных или со спинами, или с орбитами электронов. Тем не менее в некоторых частях спектра спин-орбитальное взаимодействие сравнительно мало; поэтому возникающую приближенную симметрию можно установить посредством существования оптических мультиплетов.

Следовательно, совершенно не удивительно, что такой простой математический объект, как уравнение (3.1),



приводит к приближенным симметриям, соответствующим более высоким группам, которые содержат точные группы (3.1) в качестве подгрупп. Вполне можно понять и тот факт, что группы унитарных преобразований некоторого числа комплексных переменных играют важную роль, — ведь унитарные преобразования в гильбертовом пространстве асимптотических состояний соответствуют каноническим преобразованиям классической механики. Если несколько состояний случайно имеют одну и ту же массу, то их унитарные преобразования легко могут породить приближенную симметрию. Поэтому понятие приближенной симметрии, к которой мы относим бесспорно справедливые  $SU_3$ ,  $SU_6$  и другие приближенные инвариантности, является несколько расплывчатым.

Если мы хотим проследить появление этих симметрий подробно, то прежде всего следует отметить, что стационарные состояния из спектра уравнения (3.1) можно разделить на две различные группы (возможны и некоторые промежуточные случаи). К первой из них относятся состояния, которые можно построить с помощью полевых операторов, взятых лишь в одной пространственно-временной точке [а именно с помощью  $\chi(x)$ ,  $\chi(x)\chi^*(x)$  и  $\chi(x)\chi^*(x)\chi(x)$ ]: это  $S$ -состояния; для них решающую роль играет контактное взаимодействие. К другой группе отнесем все прочие состояния; если считать, что они составлены из состояний первого типа, то их связи, а тем самым косвенно и массы будут определяться силами далекого действия (ср. § 5 гл. 7). Могут быть и промежуточные случаи, подобные векторным мезонам  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $K^*$ ,  $\phi$ , которые должны представлять смесь  $S$ - и  $D$ -состояний фермион-антифермионной системы. Как  $S$ -состояния они будут относиться к первому типу, а как  $D$  — ко второму. Если они являются преимущественно  $D$ -состояниями, что кажется более вероятным, то рассчитывать их нужно вместе с частицами второго типа. В конечном счете к первому типу относятся только два октета ( $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$  и  $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ) и в определенном смысле фотон. Когда эти два октета получаются из уравнения (3.1), то они имитируют как раз  $SU_3$ -симметрию в ее специальном варианте «восьмеричного пути» [16, 17]; из аргументов, приведенных в § 3 и 5 гл. 7, следует массовая формула Окубо,

Это происходит, несмотря на асимметрию основного контактного взаимодействия  по отношению к группе  $SU_3$ . В случае фермионов за существование массовой формулы, которая имитирует приближенную  $SU_3$ -симметрию, по-видимому, ответственно суммирование вкладов в массы, возникающих от различных виртуальных процессов.

Стационарные состояния второго типа можно считать состоящими из стационарных состояний первого типа, причем силы связи далекого действия обусловлены полями, относящимися к первому или второму типу. Вполне правдоподобно, что если спектр составных элементов имитирует приближенную  $SU_3$ -симметрию, то это же будет справедливо и для частей спектра второго типа. Является ли это общее объяснение достаточным для интерпретации спектра, можно решить лишь путем явных расчетов, касающихся высших состояний; они пока не проделаны.

Квалификацию приближенных симметрий  $SU_3$ ,  $SU_6$ ,  $U_{12}$  и т. д. в качестве вторичных структур не следует понимать как недооценку их эвристического значения. Возможно, что в физике элементарных частиц эти симметрии играют такую же роль, как в химии понятие валентности. Для химика эвристическое значение понятия валентности, вероятно, больше, чем значение для него квантовой механики или уравнения Шредингера. Исходя из квантовых идей, было бы трудно получить конкретные границы применимости понятия валентности или подробно описать, почему оно является столь плодотворным. Но если принять во внимание степень сложности квантовой химии, станет ясно, что это понятие, вероятно, является наиболее полезным орудием для предсказания результатов химических экспериментов. Аналогично этому в физике элементарных частиц приближенные симметрии могут быть самым эффективным инструментом для предсказания новых резонансов или подобных им явлений.

#### § 4. Слабые взаимодействия

Слабые (или радиоактивные) взаимодействия отличаются от сильных и электромагнитных нарушением некоторых симметрий и следующих из них правил отбора.

Изоспиновый заряд (третья компонента изоспина) и гиперзаряд во всех случаях по отдельности не сохраняются — сохраняется лишь полный заряд; нарушается пространственная четность и при радиоактивном распаде могут рождаться нейтрино. В предположении симметрии основного состояния относительно соответствующих преобразований все эти правила отбора не вытекали из фундаментального полевого уравнения (3.1); тем самым слабые взаимодействия должны вызываться некоторой небольшой дополнительной асимметрией основного состояния. Поэтому в рамках рассматриваемой теории слабые взаимодействия следует интерпретировать на такой же основе, как и электромагнитные силы. Так как при радиоактивном распаде время жизни примерно в  $10^6$  раз больше, чем при электромагнитном, дополнительное отклонение от симметрии должно быть гораздо меньшим, чем ответственная за электромагнетизм асимметрия в изопространстве. Следовательно, двухточечные или четырехточечные функции, характеризующие основное состояние, будут, по-видимому, содержать очень малые члены, не инвариантные относительно пространственного отражения или отдельных калибровочных групп, связанных с изозарядом или гиперзарядом. Если это предположение является правильным, то применимы общие соображения § 1 гл. 7. Теорема Голдстоуна снова приводила бы от асимметрии основного состояния к существованию частиц нулевой массы покоя. В этом случае экспериментальные результаты наводят на мысль, что нейтрино или их пары могли бы играть роль голдстоуновских частиц. Тогда в свою очередь существование нейтрино было бы ответственно за нарушение четности. Принципиально это утверждение не противоречит существованию нарушающих четность слабых распадов, при которых нейтрино не испускаются (например,  $\Lambda \rightarrow \pi + N$ ). Даже в этом пункте аналогия с электромагнетизмом является полной. Действительно, могут существовать распады с нарушением изоспина или  $G$ -четности, происходящие за счет действия кулоновских сил, без испускания фотонов (например,  $\eta \rightarrow 3\pi$ ). Так как в случае радиоактивного распада первоначально имеется дискретная группа (группа пространственной четности), которая нарушается «слабой»

асимметрией основного состояния, то здесь обычная голдстоуновская аргументация будет требовать некоторого видоизменения. Четность не является классической наблюдаемой, и поэтому аргументы, согласно которым голдстоуновская частица обязана быть бозоном, возможно, потеряют силу. Так же как фотоны представляют смесь двух состояний с изоспином 0 и 1 в равной пропорции, так и нейтрино с определенной спиральностью будет аналогичной смесью состояний с противоположными четностями. С этой точки зрения правдоподобной является интерпретация нейтрино как голдстоуновской частицы. С другой стороны, теория слабых взаимодействий на этой основе еще не создана. Численное значение зоммерфельдовской постоянной тонкой структуры, которая примерно в 10 раз меньше соответствующей константы  $\pi-N$ -связи, можно понимать как результат обычных соотношений [см. (8.31) и (8.32)] для констант связи, примененных к бозонам нулевой массы, обладающих спином 1. Увидеть в настоящее время, каким образом из подобных соотношений может следовать чрезвычайно малое значение для константы связи фермиевского взаимодействия при радиоактивном распаде, нельзя.

Вместе с тем существуют два эмпирических факта, которые предполагают наличие тесной связи между фундаментальным уравнением (3.1) и явлениями из области слабых взаимодействий: универсальность слабых взаимодействий и их трансформационные свойства в лоренцевом пространстве.

В феноменологической теории [119, 120] слабые взаимодействия в первом приближении можно описать лагранжианом

$$\mathcal{L} = G j_{\mu}^{*}(x) j_{\mu}(x), \quad (9.2)$$

где  $G$  — константа связи, а «слабый ток» в лоренцевом пространстве дается формулой

$$j_{\mu}(x) = \sum_{a,b} \bar{\psi}_a \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_b. \quad (9.3)$$

Индексы  $a$  и  $b$  относятся к частицам (используются следующие обозначения:  $p$  — протон,  $n$  — нейтрон,  $\Lambda$  —  $\Lambda$ -ча-

стица,  $\nu$  и  $\nu'$  — нейтрино<sup>1)</sup>,  $e$  — электрон,  $\mu$  — мюон), причем ток содержит члены

$$j(x) = \bar{\psi}_\nu \dots \psi_{e^-} + \bar{\psi}_{\nu'} \dots \psi_{\mu^-} + \bar{\psi}_p \dots \psi_n + \bar{\psi}_p \dots \psi_\Lambda. \quad (9.4)$$

Ток порождает или уничтожает электрический заряд; в этом отношении он является «заряженным» двойником «нейтрального» электромагнитного тока.

На самом деле взаимодействие (9.2) очень похоже на фундаментальное взаимодействие из уравнения (3.1). Множитель  $1 + \gamma_5$ , входящий в (9.3), указывает, что лагранжиан (9.2) фактически представляет взаимодействие между вейлевскими спинорами типа  $(\chi^* \sigma_\mu \chi) (\chi^* \sigma^\mu \chi)$ ; члены  $(\tilde{\chi}^* \bar{\sigma}_\mu \tilde{\chi}) (\tilde{\chi}^* \bar{\sigma}^\mu \tilde{\chi})$ , симметричные относительно операции четности, исключены. Для барионных токов за счет «одевания» барионов выражение (9.3) впоследствии несколько видоизменяется, но исходным является, по-видимому, все же взаимодействие (9.3). Тот факт, что все токи, входящие в (9.4), появляются приблизительно с одинаковыми коэффициентами, наводит на мысль, что все частицы порождаются одним и тем же фундаментальным спинором  $\chi(x)$  и что универсальность связи вызывается теми же причинами, как и универсальность электромагнитной связи. Из-за этой универсальности слабые взаимодействия можно понять лишь из «единой» теории, т. е. такой теории, в которой все элементарные частицы фигурируют как проявления одного исходного фундаментального принципа. Действительно, сначала вид (3.1) фундаментального полевого уравнения был подсказан эмпирической формой (9.2) и (9.3) слабых взаимодействий. В то же время описать слабые взаимодействия, исходя из (3.1), вряд ли возможно до тех пор, пока в рассматриваемой теории не будет полностью понят спектр лептонов.

Кроме радиоактивных взаимодействий, по-видимому, существует другое слабое взаимодействие, асимметричное даже относительно  $PC$ ; его можно обнаружить при

<sup>1)</sup> Символы  $\nu$  и  $\nu'$  относятся соответственно к электронному и мюонному нейтрино. — *Прим. ред.*

распаде  $K_2$ -мезона. Это взаимодействие снова следует интерпретировать как результат небольших асимметричных членов, присутствующих в обобщенных функциях Грина, которые характеризуют свойства основного состояния. Наконец, слабейшее взаимодействие — это гравитация [129, 130]<sup>1)</sup>. Так как гравитационное поле является бозонным полем далекого действия, соответствующим частицам нулевой массы, то оно обладает многими свойствами настоящего голдстоуновского поля и поэтому в конечном итоге должно интерпретироваться именно на такой основе. Другим аргументом в защиту этой точки зрения представляется универсальность гравитации.

Из проведенного обсуждения видно, что в рассматриваемой теории классические поля — электромагнетизм и гравитация — появляются как результат определенных характерных свойств реальной Вселенной; эти свойства можно назвать непредвиденными в том смысле, что из фундаментального полевого уравнения (3.1) они не следуют. Они связаны со специальными предположениями относительно основного состояния (космологической модели мира), которые разрешаются исходным законом природы (3.1), но не следуют из него с необходимостью. И в этом пункте снова нужно подчеркнуть аналогию с общей теорией относительности. Обычные силы инерции, подобные центробежным силам, в общей теории относительности появляются как следствие граничных условий (или, если применим принцип Маха, как обратное действие со стороны очень удаленных масс); из самих полевых уравнений эти силы не следуют, и в этом смысле они являются непредвиденными свойствами реального мира.

## § 5. Каскадные ливни высокой энергии

Противоположный (по отношению к слабым взаимодействиям) предельный случай реализуется во время процессов столкновения частиц при чрезвычайно высоких энергиях. В космических лучах наблюдались ливни,

<sup>1)</sup> В работе [129] обсуждается связь гравитации с единой квантовой теорией поля; эта же связь с другой точки зрения рассмотрена в [130].

создаваемые протоном с энергией вплоть до  $10^5$  Гэв. Если такой протон сталкивается с другим протоном, находящимся в атоме водорода, то в системе центра масс энергия может иметь порядок нескольких сотен Гэв. Такая энергия гораздо больше массы любой известной частицы или резонансного состояния. Поэтому следует ожидать, что в подобных ливнях, по крайней мере на первой стадии их развития, специальные свойства основного состояния играют лишь второстепенную роль и симметрии исходного закона природы здесь должны быть отчетливо видны. Если уравнение (3.1) формулирует этот закон правильно, то законы сохранения не только энергии, импульса, момента, барионного и лептонного числа, но и изоспина и странности обязаны выполняться с большой точностью; однако не будет никакого хорошего закона сохранения, соответствующего группам  $SU_3$ ,  $SU_6$  и т. д.

Как правило, в таких ливнях создается множество вторичных частиц. С ростом первоначальной энергии их средняя энергия в системе центра масс увеличивается, по-видимому, весьма слабо (возможно, логарифмически). Поэтому и число вторичных частиц с ростом полной энергии, которая передается им, увеличивается также слабо — медленнее, чем линейно. Видимо, полное поперечное сечение процесса столкновения, при котором порождается хотя бы один пион, близко к геометрическому сечению, задаваемому размерами сталкивающихся частиц. Можно, однако, поставить вопрос относительно поперечного сечения  $\sigma_\epsilon$  процесса, в котором вторичным частицам передается энергия  $\geq \epsilon$  (в системе центра масс). Если первоначальная энергия (в системе центра масс) равна  $E$  и мы рассматриваем лишь такие случаи, в которых и  $E$ , и  $\epsilon$  по сравнению с массами основных резонансов велики, то инвариантность уравнения (3.1) относительно масштабного преобразования приводит к формуле [121]

$$\sigma_\epsilon \approx \frac{\text{const}}{\epsilon^2} f\left(\frac{\epsilon}{E}\right). \quad (9.5)$$

При  $\epsilon \ll E$  функция  $f(\epsilon/E)$  приблизительно является константой, и  $\sigma_\epsilon$  будет весьма слабо зависеть от первоначальной энергии.

чальной энергии  $E$ . По-видимому, формула (9.5) согласуется со всем экспериментальным материалом [21] по каскадным ливням вплоть до  $10^5$  Гэв, указывая тем самым на важность масштабного преобразования.

Каскадные ливни содержат и другую важную информацию. Вторичные продукты зачастую создаются в несколько промежуточных этапов: сначала возникают некоторые высшие резонансные состояния, которые затем мгновенно распадаются на низшие, обладающие большим временем жизни, эти распадаются снова и т. д.; лишь в конце такого процесса порождается множество стабильных частиц. За величины, характеризующие массы резонансных состояний, которые участвуют в процессе, можно взять поперечные импульсы (в данном контексте термин «резонансное состояние» относится к состояниям, время жизни которых больше времени, необходимого для их рождения, скажем примерно  $10^{-24}$  сек). Как правило, резонансные состояния больших масс будут создавать вторичные продукты с поперечными импульсами, сравнимыми с половиной их массы. Эксперименты показывают, что даже для каскадных ливней наивысшей энергии поперечные импульсы распределены, по-видимому, согласно гауссовскому закону  $\sim \exp(-p^2/p_0^2)$ , где  $p_0 \approx 0,4$  Гэв. С полной определенностью поперечные импульсы, большие 1,5 Гэв, никогда не наблюдались. Поэтому в процессах столкновений при высоких энергиях резонансы с массами, большими 3 Гэв, фактически никакой роли не играют. Если они и существуют, то рождаются лишь с очень малой вероятностью. Этот результат является еще одним аргументом против существования в исходном законе природы некоторой фундаментальной  $SU_3$ -структуры. Ведь если бы группа  $SU_3$  была фундаментальна, то следовало бы ожидать, что в физике играет роль ее простейшее нетривиальное представление — трехмерное; соответствующие частицы<sup>1)</sup> не были обнаружены в области значений масс вплоть до 2,5 Гэв. Поэтому если они существуют, то должны обладать еще большими массами. Распределение поперечных

<sup>1)</sup> Речь идет о гипотетических кварках. — Прим. ред.



импульсов в каскадных ливнях делает их существование весьма малоправдоподобным.

Общее поведение каскадных ливней хорошо согласуется с другим эмпирическим фактом, а именно что характерная длина в физике элементарных частиц (например, в экспериментах Хофштадтера [122] по электромагнитной структуре нуклонов) имеет порядок  $0,5 \cdot 10^{-13}$  см, или ненамного меньше. Хотя существующие эксперименты и не могут исключить гораздо меньшие структуры, несомненно, что они не дают и никакого доказательства существования структур более мелких, чем  $10^{-14}$  см.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Единая теория поля, рассмотренная в этой книге, представляет попытку сформулировать закон природы, который кроется за сложным спектром элементарных частиц, их взаимодействиями и симметриями и за соотношениями существующих феноменологических теорий. В течение последних двадцати лет накоплено огромное количество экспериментальных данных об элементарных частицах. Поэтому с достаточным основанием можно думать, что при теперешнем состоянии физики такая попытка не является преждевременной и что нам уже известны все необходимые для формулировки теории факты.

Примем эту точку зрения. Тогда небесполезно будет кратко вспомнить, какие аргументы привели к выбору в качестве основы теории уравнения (3.1). Любая попытка формулировки исходного закона природы с необходимостью должна начинать с ответа на некоторое число критических вопросов относительно двух основных проблем — теоретико-групповой структуры этого закона и математического аппарата, применяемого при его формулировке.

В теории групп критические вопросы можно сформулировать следующим образом: каковы точные симметрии исходного закона природы? обусловлены ли приближенные симметрии, которые обнаружены в природе, точными, нарушаемыми асимметрией основного состояния «мира», или они являются результатом динамики, справедливой в грубом приближении лишь для ограниченной области явлений? Ответы на эти вопросы имеют решающее значение для математической формулировки единой теории.

В рассмотренной попытке линия раздела между точными и приближенными симметриями проведена между

группами  $U_2$  и  $SU_3$ . Причина этого подробно обсуждалась в тексте данной книги. Может быть, наиболее сильным аргументом в защиту выбора такой линии раздела является то, что в случае  $U_2$  существует голдстоуновская частица (фотон), а для группы  $SU_3$  она отсутствует.

Что касается математического аппарата, то здесь критические вопросы таковы: является ли одна  $S$ -матрица математическим инструментом, достаточным для формулировки теории, включая и ее каузальную структуру? или можно использовать концепцию локального полевого оператора, коммутирующего (или антикоммутирующего) на пространственно-подобных расстояниях и удовлетворяющего дифференциальному уравнению? можно ли построить гильбертово пространство, в котором действуют эти полевые операторы, из одних только асимптотических операторов?

Рассмотренная теория на последний вопрос дает отрицательный ответ, но на второй — положительный. Возникающая в гильбертовом пространстве индефинитная метрика приводит к заметному расширению обычной математической схемы квантовой механики. Физически это расширение можно интерпретировать как установление того, что к «локальной» области, пространственные размеры которой имеют порядок  $10^{-14}$  см или меньше, понятие вероятности неприменимо. Универсальную длину, которая в теорию входит через константу  $l$  или через массу протона, можно определить как такую длину, ниже которой квантовомеханическое понятие вероятности теряет силу.

Такие ответы на критические вопросы могут быть и не единственно возможными. Однако, учитывая, что в рамках аксиом Вайтмана до сих пор не удалось построить релятивистскую теорию со взаимодействием, можно заключить, что они являются, по-видимому, простейшими.

В случае, когда на критические вопросы, касающиеся и теории групп, и математического аппарата, приняты подобные ответы, фундаментальное уравнение (3.1) определяется, по-видимому, однозначно.

Концепция единой полевой теории элементарных частиц имеет и другую сторону, которая нуждается в некотором обсуждении. Речь идет о ее связи с другими частями физики. В первый момент может показаться, что все законы из других областей физики следует рассматривать просто как следствия фундаментального закона и что этот универсальный закон должен включать все возможные явления. Так как программа формулировки всех физических законов с помощью одного простого уравнения кажется слишком претенциозной, то именно эта характерная черта единой теории вызвала много критики.

На нее можно дать два ответа. Во-первых, можно сказать, что требование универсальности обусловлено не претенциозностью программы — оно с необходимостью следует из того, что элементарные частицы являются мельчайшими элементами материи. Например, очевидна связь квантовой механики с химией: так как все атомы и молекулы состоят из ядер и электронов, фундаментальные уравнения квантовой механики неизбежно должны содержать и всю химию. Это не означает, что квантовая механика решила или может решить все химические задачи. Наоборот, ее эвристическое значение в химии до сих пор не является очень впечатляющим. Тем не менее не может быть никакого сомнения в том, что в рамках квантовой механики заключены и химические явления. Примерно так же единая теория поля должна служить рамками для всех физических явлений.

Во-вторых, следует подчеркнуть, что фундаментальное уравнение не определяет законы во всех областях физики полностью. Например, пока не добавлено специфическое предположение об асимметрии основного состояния, т. е. о космологической модели мира, электромагнитные законы из уравнения не следуют. Аналогично радиоактивность и гравитация, вероятно, связаны со структурой мира на больших расстояниях. В какой-то мере граничные условия, касающиеся основного состояния, являются довольно гибкими, и их нужно привести в соответствие со свойствами реального мира; эта процедура отнюдь не тривиальна.

Если когда-нибудь будут разрешены основные проблемы физики высоких энергий, то, даже если исключить вопросы, связанные с граничными условиями, физика будет еще не завершена со стороны области низких энергий. Из опыта мы знаем, что сложные явления, связанные с существованием жизни и живых организмов, требуют для своего описания новых понятий, помимо тех, которые используются в обычной физике и химии. Вопрос, могут ли эти биологические понятия найти место в математических рамках квантовой теории, при теперешнем состоянии биологии является открытым. Можно надеяться, что огромного богатства форм, выражимых, например, статистическими матрицами, будет достаточно для описания даже биологических явлений. Но может оказаться, что необходимы новые математические конструкции, отличающиеся даже в принципе от тех, которые используются в квантовой теории. Каков бы ни был ответ на этот вопрос, к физике высоких энергий отношения он не имеет. В свою очередь окончательная формулировка закона природы, являющегося основой физики высоких энергий, ни на одну из проблем, возникающих на границе между физикой и биологией, ответа не дает. Поэтому видимая универсальность закона природы, который лежит в основе явлений, происходящих с элементарными частицами, не должна приводить к неверному выводу, будто бы он имеет отношение и к другим областям естественных наук. Проблема возможности и необходимости единой полевой теории материи должна решаться прежде всего с точки зрения ее ценности для понимания сложных явлений физики элементарных частиц.

## І. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Представление Челлена — Лемана (3.25) основано на двухточечных функциях линейной теории поля. В простейшем случае скалярного поля, удовлетворяющего уравнению Клейна — Гордона, все различные двухточечные функции, подобные  $\langle 0 | \varphi(x) \varphi^*(y) | 0 \rangle$ ,  $\langle 0 | T \varphi(x) \varphi^*(y) | 0 \rangle$ ,  $\langle 0 | [\varphi(x) \varphi^*(y)] | 0 \rangle$  и т. д., можно выразить интегралом вида

$$\Delta_C = (2\pi)^{-4} \int_C d^4p \frac{e^{-ipx}}{-p^2 + \kappa^2}, \quad (I. 1)$$

где  $C$  есть контур интегрирования в комплексной  $p_0$ -плоскости. Впервые эти функции были введены Йорданом и Паули [123]: впоследствии их подробно изучил Швингер [124].

Если  $C$  определяет замкнутый контур в конечной области комплексной  $p_0$ -плоскости, то функция  $\Delta_C$  удовлетворяет однородному уравнению Клейна — Гордона

$$(\square + \kappa^2) \Delta_C = 0. \quad (I. 2)$$

Это утверждение следует из (I. 1), так как при действии на этот интеграл оператором  $\square + \kappa^2$  полюса исчезают. В литературе часто используются четыре различных решения однородного уравнения (I. 2), которые обозначаются как  $\Delta$ ,  $\Delta_+$ ,  $\Delta_-$  и  $\Delta_1$ . Они определяются следующим образом:

$$[\varphi(x) \varphi^*(y)] = -i \Delta(x - y), \quad (I. 3)$$

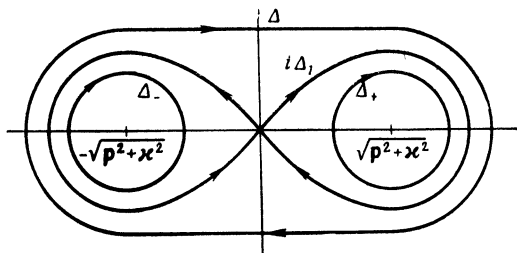
$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi^*(y) + \varphi^*(y) \varphi(x) | 0 \rangle = \Delta_1(x - y), \quad (I. 4)$$

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi^*(y) | 0 \rangle = -i \Delta_+(x - y), \quad (I. 5)$$

$$\langle 0 | \varphi^*(y) \varphi(x) | 0 \rangle = i \Delta_-(x - y). \quad (I. 6)$$

Соответствующие контуры интегрирования в комплексной  $p_0$ -плоскости указаны на фиг. 6.

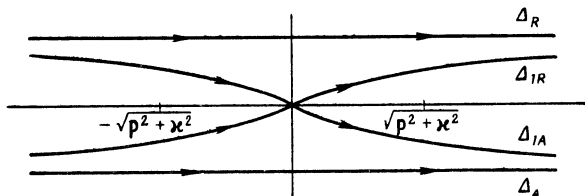
Путем растяжения контура интегрирования при  $(x - y)_0 = 0$  в окрестность бесконечного радиуса можно



Фиг. 6.

получить, что для всех конечных пространственно-подобных расстояний  $x - y$  функция  $\Delta(x - y)$  обращается в нуль.

Если контур интегрирования выбран так, что он идет из  $p_0 = -\infty$  в  $p_0 = +\infty$ , то функция (I.1) не удовлетво-



Фиг. 7.

ряет однородному уравнению Клейна — Гордона; вместе с тем, так как

$$(2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p e^{-ipx} = \delta^4(x), \quad (I.7)$$

то  $\Delta_C$  теперь удовлетворяет неоднородному уравнению

$$(\square + \kappa^2) \Delta_C = \delta^4(x) \quad (I.8)$$

и, таким образом, соответствует функции Грина.

В литературе используется пять функций этого типа:  $\Delta_R$ ,  $\Delta_A$ ,  $\Delta_{1R}$ ,  $\Delta_{1A}$ ,  $\Delta_P$ . Соответствующие контуры интегрирования изображены на фиг. 7.

Для  $\Delta_P = \frac{1}{2}(\Delta_A + \Delta_R)$  в двух полюсах нужно брать главное значение.

Запаздывающая функция  $\Delta_R$  исчезает при отрицательных значениях  $x_0$ , а опережающая функция  $\Delta_A$  — при положительных.

Важная хронологически упорядоченная двухточечная функция задается выражением

$$\langle 0 | T\varphi(x)\varphi^*(y) | 0 \rangle = -i\Delta_{1R}(x-y). \quad (I. 9)$$

Девять различных  $\Delta_C$ -функций связаны несколькими линейными соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_+ + \Delta_- = \Delta_R - \Delta_A, \\ i\Delta_1 &= \Delta_+ - \Delta_- = \Delta_{1R} - \Delta_{1A}, \end{aligned} \quad (I. 10)$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}(\Delta_R + \Delta_A) = \frac{1}{2}(\Delta_{1R} + \Delta_{1A}),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1R} + \Delta_- &= \Delta_R, & \Delta_{1A} - \Delta_- &= \Delta_A, \\ \Delta_{1R} - \Delta_+ &= \Delta_A, & \Delta_{1A} + \Delta_+ &= \Delta_R, \\ \Delta_P - \frac{1}{2}\Delta &= \Delta_A, & \Delta_P + \frac{1}{2}\Delta &= \Delta_R, \\ \Delta_P - \frac{i}{2}\Delta_1 &= \Delta_{1A}, & \Delta_P + \frac{i}{2}\Delta_1 &= \Delta_{1R}. \end{aligned} \quad (I. 11)$$

Наконец, отметим условия действительности

$$\begin{aligned} \Delta_+^* &= \Delta_-, & \Delta_R^* &= \Delta_R, \\ \Delta_A^* &= \Delta_A, & \Delta_{1R}^* &= \Delta_{1A} \end{aligned} \quad (I. 12)$$

и свойства симметрии

$$\begin{aligned} \Delta(-x) &= -\Delta(x), & \Delta_1(-x) &= \Delta_1(x), & \Delta_P(-x) &= \Delta_P(x), \\ \Delta_R(-x) &= \Delta_A(x), & \Delta_{1R}(-x) &= \Delta_{1R}(x), \\ \Delta_{1A}(-x) &= \Delta_{1A}(x), & \Delta_+(-x) &= -\Delta_-(x). \end{aligned} \quad (I. 13)$$

Если в линейной теории поля полевой оператор является не скаляром, а спинором или вектором, то подынтегральное выражение в формуле, соответствующей



(I.1), будет содержать в числителе матрицы, которые относятся к спинорным или векторным индексам полевого оператора; для того чтобы образовывать инвариантные выражения, они могут быть связаны с компонентами импульса  $p$ . Однако знаменатель будет тем же самым, поэтому определения различных двухточечных функций посредством разных контуров интегрирования по существу совпадают.

Для вычислений, которые приводились в тексте книги, наиболее важной является двухточечная функция хронологически упорядоченного произведения; особая связь этой функции с принципом релятивистской причинности впервые была подчеркнута Фейнманом (см. [93, 125]). Она естественным путем отражает то обстоятельство, что частица может аннигилировать лишь после своего рождения.

## II. МОДЕЛЬ ЛИ<sup>1)</sup>

### § 1. Описание модели

В приближенной двухточечной функции (3.39) регуляризация осуществляется посредством двойного полюса при лептонной массе; там мы просто положили эту массу равной нулю. Следствия существования такого двойного полюса впервые были изучены с помощью модели, предложенной Ли в качестве упрощенного аналога квантовой электродинамики; поэтому мы здесь повторим его анализ.

Модель допускает существование действительного бозонного поля  $\varphi_\theta$ , удовлетворяющего уравнению Клейна — Гордона:

$$(\square + m_\theta^2) \varphi_\theta = 0. \quad (\text{II.1})$$

Соответствующие частицы называются  $\theta$ -частицами. Кроме этого бозонного поля, модель (в своем простейшем варианте) содержит частицу бесконечной массы, локализованную в источнике; она может существовать в двух состояниях, называемых  $N$ - и  $V$ -состояниями.

<sup>1)</sup> См. работы [71, 72, 54].

Бозонное поле взаимодействует с этой частицей таким образом, что переходы из  $V$ - в  $N$ -состояние имеют место лишь при испускании  $\theta$ -частицы, а переходы из  $N$ - в  $V$ -состояние — лишь при поглощении  $\theta$ -частицы:

$$V \rightarrow N + \theta, \quad N + \theta \rightarrow V. \quad (\text{II. 2})$$

Для математического описания этой ситуации в представлении Шредингера мы используем полевой оператор в момент времени  $t=0$ :

$$\varphi_{\theta}(\mathbf{x}, 0) = \varphi_{\theta}(\mathbf{x}) \quad (\text{II. 3})$$

и оператор  $\varphi(\mathbf{k})$ , являющийся его фурье-образом:

$$\varphi_{\theta}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi_{\theta}(\mathbf{k}). \quad (\text{II. 4})$$

Сопряженной является переменная

$$\dot{\varphi}_{\theta}(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}), \quad \text{и} \quad \pi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \pi(\mathbf{k}). \quad (\text{II. 5})$$

Полагая

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m_{\theta}^2, \quad (\text{II. 6})$$

мы можем ввести в качестве операторов рождения и уничтожения соответственно

$$\begin{aligned} a^*(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\pi(\mathbf{k}) + i\omega\varphi_{\theta}(\mathbf{k})], \\ a(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\pi(\mathbf{k}) - i\omega\varphi_{\theta}(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (\text{II. 7})$$

Коммутационные соотношения таковы:

$$\begin{aligned} [\pi(\mathbf{x}), \varphi_{\theta}(\mathbf{x}')] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\pi(\mathbf{k}), \varphi_{\theta}(\mathbf{k}')] &= -i\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (\text{II. 8})$$

Для частицы, находящейся в источнике в состоянии  $N$  или  $V$ , операторы  $\psi_N$ ,  $\psi_N^*$  или  $\psi_V$ ,  $\psi_V^*$  будут определяться как операторы рождения и уничтожения; их антикоммутаторы таковы:

$$\{\psi_V \psi_V^*\} = 1, \quad \{\psi_N, \psi_N^*\} = 1, \quad \{\psi_V, \psi_N^*\} = 0. \quad (\text{II. 9})$$

Предполагается, что в этих переменных гамильтониан системы имеет вид

$$H = m_V \psi_V^* \psi_V + m_N \psi_N^* \psi_N + \int \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d^3k - \\ - \frac{g_0}{V^{4\pi}} \int_{\hat{\omega}} \frac{d^3k}{V^{2\omega}} [\psi_V^* \psi_N a(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k}) \psi_N^* \psi_V]. \quad (\text{II. 10})$$

Здесь  $m_V$  и  $m_N$  — «голые» энергии состояний  $V$  и  $N$ ;  $\hat{\omega}$  — параметр обрезания, ограничивающий значения  $\mathbf{k}$  в интеграле тем, что  $\omega(\mathbf{k}) \leq \hat{\omega}$  (впоследствии будет рассмотрен предельный случай  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$ );  $g_0$  — действительная константа связи.

## § 2. Решение уравнения Шредингера в секторе $\binom{N+\theta}{V}$

Гамильтониан (II.10) имеет два тривиальных решения. Если в источнике нет никаких частиц, то нет и взаимодействия между  $\theta$ -частицами; тогда гамильтониан эквивалентен гамильтониану  $\theta$ -бозонного поля в отсутствие взаимодействия. Если нет  $\theta$ -частиц, но в источнике частица находится в  $N$ -состоянии, то снова нет взаимодействия, и энергия системы равна  $m_N$  (без ограничения общности можно, по определению, положить  $m_N = 0$ ).

Простейший нетривиальный случай задается ситуацией  $\binom{N+\theta}{V}$ , т. е. частица находится в источнике или в  $V$ -состоянии без  $\theta$ -частиц, или в  $N$ -состоянии с одной  $\theta$ -частицей. Член взаимодействия в (II.10) устанавливает связь между этими двумя возможностями. В этом секторе общее состояние можно определить формулой

$$|\Phi\rangle = \left( c \psi_V^* + \psi_N^* \int \varphi(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) d^3k \right) |0\rangle, \quad (\text{II. 11})$$

для которой будет использоваться сокращенная запись

$$|\Phi\rangle = \begin{cases} c, \\ \varphi(\mathbf{k}). \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

Действие гамильтониана на  $\Phi$  приводит к соотношению

$$H\Phi = \Phi' = \begin{cases} c \\ \varphi'(\mathbf{k}), \end{cases} \quad (\text{II. 13})$$

где

$$c' = m_V c - \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int_{\hat{\omega}} \frac{\varphi(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}} d^3k, \quad (\text{II. 14})$$

$$\varphi'(\mathbf{k}) = \omega\varphi(\mathbf{k}) - \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{c}{\sqrt{2\omega}}. \quad (\text{II. 15})$$

Как видно из (II. 14) и (II. 15), взаимодействие имеет место лишь в  $S$ -состояниях. Поэтому удобно ограничиться расчетами, относящимися к этим состояниям, и положить ( $k = |\mathbf{k}|$ ), что даст

$$\varphi(k) = \frac{\psi(k)}{k\sqrt{4\pi}}. \quad (\text{II. 16})$$

Тогда уравнение Шредингера

$$H\Phi = E\Phi \quad (\text{II. 17})$$

дает для  $S$ -состояний

$$(\omega - E)\psi(k) = \frac{g_0 k}{\sqrt{2\omega}} c,$$

$$(m_V - E)c = g_0 \int_0^{\hat{\omega}} \frac{k}{\sqrt{2\omega}} \psi(k) dk. \quad (\text{II. 18})$$

Согласно (II. 18), в непрерывном спектре  $E = \sqrt{m_0^2 + k_0^2}$  мы можем положить

$$\psi(k) = \delta(k - k_0) - \frac{g_0 k c}{(E - \omega + i\gamma)\sqrt{2\omega}} \quad (\gamma \rightarrow 0), \quad (\text{II. 19})$$

где слагаемое  $i\gamma$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) в знаменателе обычным образом приводит к расходящимся волнам. Тогда из (II. 18) следует

$$c \left[ m_V - E + g_0^2 \int_0^{\hat{\omega}} \frac{k^2 dk}{2\omega(E - \omega + i\gamma)} \right] = \frac{g_0 k_0}{\sqrt{2\omega_0}}. \quad (\text{II. 20})$$

Удобно ввести функцию  $h(z)$  комплексной переменной  $z$ :

$$h(z) = \frac{z - m_V}{g_0^2} + \int_{\hat{\omega}} \frac{k^2 dk}{2\omega(\omega - z)}. \quad (\text{II. 21})$$

Она является регулярной аналитической функцией в  $z$ -плоскости с разрезом вдоль действительной оси от  $z = m_\theta$  до  $z = +\infty$ . Ее значения на верхнем и нижнем берегах разреза будем обозначать через  $h^\pm$ :

$$h^\pm(E) = \overline{h(E)} \pm \pi i \frac{k_0}{2}. \quad (\text{II. 22})$$

Функция  $\overline{h(E)}$  действительна. Из (II. 20) получаем

$$h^+(E) g_0 c = -\frac{k_0}{\sqrt{2E}} \quad (\text{II. 23})$$

и

$$\psi(k) = \delta(k - k_0) + \frac{k k_0}{2\sqrt{\omega E}(E - \omega + i\gamma) h^+(E)}. \quad (\text{II. 24})$$

Фаза рассеянной волны равна

$$e^{2i\delta(E)} \equiv S(E) = 1 - \frac{\pi i k_0}{h^+(E)} = \frac{h^-}{h^+}, \quad (\text{II. 25})$$

а из (II.22) следует

$$\text{tg } \delta(E) = -\pi \frac{k_0}{2h(E)}. \quad (\text{II. 26})$$

В дискретном спектре ( $E < m_\theta$ ) уравнения (II. 18) приводят к

$$\psi(k) = \frac{g_0 k}{(\omega - E)\sqrt{2\omega}} c \quad (\text{II. 27})$$

и

$$h(E) = 0. \quad (\text{II. 28})$$

Дискретные собственные значения определяются нулями функции  $h(z)$ .

### § 3. Обсуждение свойств функции $h(z)$

При  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  интеграл в правой части (II. 21) линейно расходится. Поэтому удобно использовать соотношение

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} + \frac{z^2}{\omega^2(\omega - z)} \quad (\text{II. 29})$$

и положить

$$h(z) = a + bz + z^2 G(z), \quad (\text{II. 30})$$

где

$$a = -\frac{m_V}{g_0^2} + \int_0^{\hat{\omega}} \frac{k^2 dk}{2\omega^2}, \quad b = \frac{1}{g_0^2} + \int_0^{\hat{\omega}} \frac{k^2 dk}{2\omega^3}, \quad (\text{II. 31})$$

$$G(z) = \int_0^{\hat{\omega}} \frac{k^2 dk}{2\omega^3(\omega - z)}. \quad (\text{II. 32})$$

В функции  $G(z)$  можно перейти к пределу  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$ ; тогда для главного значения  $\overline{G}(z)$ , полагая  $\zeta = z/m_\theta$ , получаем

$$2m_\theta \overline{G}(z) = \frac{\pi}{2\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + \begin{cases} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} \ln(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) & \text{при } \zeta \leq -1, \\ -\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \zeta\right) & \text{при } -1 \leq \zeta \leq 1, \\ -\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) & \text{при } \zeta \geq 1. \end{cases} \quad (\text{II. 33})$$

Для конечных значений  $\hat{\omega}$  равенство (II.30) определяет конечную функцию  $h(z)$ , которую можно применить для нахождения собственных значений, воспользовавшись уравнением (II.28). Однако в пределе при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  константа  $b$ , входящая в (II.31), и  $h(z)$  могли бы оставаться конечными лишь для отрицательных значений  $g_0^2$ , что противоречит предположению (II.10). Поэтому модель Ли в своей первоначальной форме (II.10) при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  конечного решения не имеет.

Однако Челлен и Паули [72] указали, что если бы изменились предположения (§ 1) модели Ли относительно метрики гильбертова пространства, то уравнения Шредингера (II.13) и (II.28) сохранили бы свой вид. В этом случае было бы возможным ввести  $g_0$  как мнимую величину и отыскать конечные решения даже в пределе при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$ .

Необходимые изменения заключаются в следующем. Нормы  $V$ -состояний должны быть отрицательными, и

поэтому

$$\{\psi_V, \psi_V^*\} = -1. \quad (\text{II. 34})$$

Новый гамильтониан имеет вид

$$H = -m_V \psi_V^* \psi_V + m_N \psi_N^* \psi_N + \int a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \omega d^3k - \\ - \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} [-\psi_V^* \psi_N a(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k}) \psi_N^* \psi_V], \quad (\text{II. 35})$$

и (II. 11) нужно заменить на

$$|\Phi\rangle = \left( -c\psi_V^* + \psi_N^* \int \varphi(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) d^3k \right) |0\rangle. \quad (\text{II. 36})$$

Равенства (II. 31) остаются неизменными. Для  $a$  и  $b$  можно получить конечные значения, если при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$

$$g_0^2 \sim -\frac{2}{\ln \hat{\omega}}, \quad m_V \sim -\frac{\hat{\omega}}{\ln \hat{\omega}}. \quad (\text{II. 37})$$

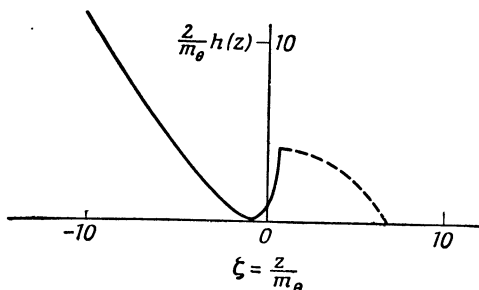
Константа  $g_0$  теперь мнимая, гамильтониан (II.35) является самосопряженным, но лишь «псевдоэрмитовым». Согласно (2.31), для собственных состояний с нормой, отличной от нуля, собственные значения  $H$  действительны.

Для определения свойств функции  $h(z)$  в пределе  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  заметим, что на действительной оси при  $z < m_\theta$   $(d^2h/dz^2) > 0$  и

$$\frac{dh}{dz}(-\infty) = -\infty, \quad \frac{dh}{dz}(m_\theta) = +\infty.$$

Между  $z = -\infty$  и  $z = m_\theta$  функция  $h(z)$  имеет точно один минимум. Поэтому на действительной оси она может иметь два нуля или ни одного; в предельном случае два нуля сливаются в один [в этой точке кривая  $h(z)$  касается действительной оси:  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) = 0$ ]. При этом в точке  $z = z_0$  функция  $1/h(z)$  имеет двойной полюс; его можно использовать в качестве аналога двойного полюса, имеющегося в приближенной двухточечной функции (3.39). Наконец, если на действительной оси нет ни одного нуля  $h(z)$ , то будут существовать два комплексных корня уравнения  $h(z) = 0$ , относящихся к состояниям, норма которых, согласно (2.31), равна нулю.

Здесь нас будет интересовать лишь случай двойного полюса у  $1/h(z)$ ; будем считать, что он расположен в



Фиг. 8.

точке  $z = z_0 = E_0$ , и введем обозначение  $\zeta_0 = z_0/m_0$ . Тогда  $\overline{h(z)}$  имеет вид

$$\overline{h(z)} = \frac{m_0}{2} \left\{ \frac{1 - \zeta_0 \zeta}{\zeta_0^2 - 1} s(\zeta_0) + \zeta - \zeta_0 + s(\zeta) \right\}, \quad (\text{II. 38})$$

где

$$s(\zeta) = \begin{cases} \sqrt{\zeta^2 - 1} \ln(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) & \text{при } \zeta \leq -1, \\ -\sqrt{1 - \zeta^2} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \zeta \right) & \text{при } -1 \leq \zeta \leq 1, \\ -\sqrt{\zeta^2 - 1} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) & \text{при } \zeta \geq 1. \end{cases} \quad (\text{II. 39})$$

На фиг. 8 изображена  $h(z)$  для специального случая  $\zeta_0 = -1$ .

#### § 4. Собственные состояния, связанные с двойным полюсом функции $1/h(z)$

Двойной полюс в функции  $1/h(z)$  можно получить в результате предельного перехода от случая двух нулей путем изменения в (II.30) константы  $a$ . До этого предельного перехода корень уравнения (II.28) с меньшим значением  $\zeta$  соответствует состоянию с отрицательной нормой, а другой корень, с более высоким значением —



нормальному состоянию. Возникает вопрос, получается ли в предельном случае одно или два решения уравнения Шредингера и какой будет норма этих состояний. Пусть до предельного перехода двумя решениями уравнений Шредингера являются  $\Phi$  и  $\Phi + \Delta\Phi$ , а собственные значения суть  $E$  и  $E + \Delta E$ . Тогда

$$\begin{aligned} H(\Phi + \Delta\Phi) &= (E + \Delta E)(\Phi + \Delta\Phi), \\ H\Phi &= E\Phi. \end{aligned} \quad (\text{II. 40})$$

Вычитая одно уравнение из другого и пренебрегая членами высших порядков, получаем

$$H\Delta\Phi = E\Delta\Phi + \Phi\Delta E,$$

или

$$H \frac{\Delta\Phi}{\Delta E} = E \frac{\Delta\Phi}{\Delta E} + \Phi. \quad (\text{II. 41})$$

Из (II.40) и (II.41) следует, что в случае двойного полюса в функции  $1/h(z)$  имеется лишь *одно* решение уравнения Шредингера. Однако, комбинируя его с собственными состояниями, принадлежащими непрерывному спектру, мы *не получим* полного гильбертова пространства рассматриваемой системы (ср. § 6 гл. 2). Для полноты следует добавить дипольное состояние

$$\Phi_{\text{дип}} = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta E}, \quad (\text{II. 42})$$

которое не является собственным состоянием гамильтониана.

Согласно (II.27), норма дискретного состояния, удовлетворяющего уравнению (II.28), равна

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = |c^2| \left[ |g_0^2| \int_0^{\hat{\omega}} \frac{k^2 dk}{2\omega(\omega - E)^2} - 1 \right], \quad (\text{II. 43})$$

где минус единица обусловлена компонентой, содержащей  $V$ -состояние, норма которого отрицательна. Из (II.21) и (II.23) получаем

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = |c^2 g_0^2| \frac{dh(E)}{dE} = |c^2 g_0^2| h'(E). \quad (\text{II. 44})$$

Как видно, например, из (II.19) и (II.23), при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  произведение  $|cg_0|$  остается конечным. Для состояния с двойным корнем (II.28) мы имеем  $h'(E) = 0$ , и поэтому норма этого состояния  $\Phi_0$  должна быть нулем:

$$\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (\text{II. 45})$$

Следовательно,  $\Phi_0$  является призрачным состоянием, подобным состоянию  $G^+$  из (3.46). И  $\Phi_0$ , и  $\Phi_{\text{дип}}$  ортогональны всем состояниям непрерывного спектра, но они не ортогональны друг другу. Уравнениями (II.41) и (II.42)  $\Phi_{\text{дип}}$  определяется неоднозначно, так как при умножении  $\Phi$  до предельного перехода (II.42) на любую функцию  $E$  в большинстве случаев  $\Phi_{\text{дип}}$  изменяется на аддитивный член  $\text{const } \Phi_0$ . Так как норма  $\Phi_0$  исчезает, это слагаемое нельзя использовать для того, чтобы сделать  $\Phi_0$  и  $\Phi_{\text{дип}}$  ортогональными друг другу; но можно сделать так, чтобы норма  $\Phi_{\text{дип}}$  также исчезала. Поэтому к определению  $\Phi_{\text{дип}}$  мы будем добавлять по-студат

$$\langle \Phi_{\text{дип}} | \Phi_{\text{дип}} \rangle = 0. \quad (\text{II. 46})$$

Окончательно в пространстве  $\Phi_{\text{дип}}$  и  $\Phi_0$  метрический тензор можно выбрать в виде

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \Phi_{\text{дип}} & \Phi_0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \Phi_{\text{дип}} \\ \Phi_0 \end{array} & \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (\text{II. 47})$$

в тесной аналогии с (3.48).

Так как  $\Phi_{\text{дип}}$  удовлетворяет неоднородному уравнению

$$H\Phi_{\text{дип}} = E\Phi_{\text{дип}} + C\Phi_0, \quad (\text{II. 48})$$

то среднее значение энергии в дипольном состоянии бесконечно:

$$\bar{H}_{\text{дип}} = \frac{\langle \Phi_{\text{дип}} | H | \Phi_{\text{дип}} \rangle}{\langle \Phi_{\text{дип}} | \Phi_{\text{дип}} \rangle} = \frac{C}{\langle \Phi_{\text{дип}} | \Phi_{\text{дип}} \rangle} = \infty. \quad (\text{II. 49})$$

Если используется представление Шредингера, в котором вектор состояния изменяется как функция времени согласно уравнению

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi, \quad (\text{II. 50})$$

то (II. 40) и (II. 48) дают

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= e^{-iE_0 t} \Phi_0(0), \\ \Phi_{\text{дин}}(t) &= e^{-iE_0 t} \Phi_{\text{дин}}(0) - iCt e^{-iE_0 t} \Phi_0(0). \end{aligned} \quad (\text{II. 51})$$

Последнее соотношение приводит к такой временной зависимости матричных элементов, которая использовалась в (3.45).

### § 5. Перенормировка $\psi_v$

Вакуумное среднее антикоммутиатора

$$\langle 0 | \{ \psi_V, \psi_V^* \} | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_V, \psi_V^* | 0 \rangle = -1 \quad (\text{II. 52})$$

можно рассматривать как сумму вкладов от всех промежуточных состояний, как дискретных, так и принадлежащих непрерывному спектру. Если собственные функции состояний нормированы должным образом, то в каждой из них коэффициент совпадает с матричным элементом  $\psi_V$ , соответствующим переходу из вакуума в это состояние. Сперва мы рассмотрим случай двух различных корней уравнения  $h(z) = 0$ . Если коэффициент  $c$  для дискретных состояний взять из (II.44), а для непрерывного спектра — из (II.43), то равенство (II.52) можно записать в виде

$$\frac{1}{|g_0^2|} \left[ \sum_i \frac{1}{h'(E_i)} + \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2Eh^+(E)h^-(E)} \right] = -1. \quad (\text{II. 53})$$

В пределе при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$   $|g_0^2|$  исчезает. Следовательно, в этом случае сумма по дискретным состояниям должна компенсировать вклад континуума. В этом можно убедиться, изменяя во втором слагаемом в скобках контур

интегрирования. Это слагаемое можно обозначить через  $g^2$ :

$$\begin{aligned} g^2 &= \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{2\omega h^+(\omega) h^-(\omega)} = \int_{m_\theta}^{\infty} \frac{k d\omega}{2h^+(\omega) h^-(\omega)} = \\ &= \int_{m_\theta}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \left( \frac{1}{h^-(\omega)} - \frac{1}{h^+(\omega)} \right) = \\ &= \int_C \frac{d\omega}{2\pi i h(\omega)} = - \sum_i \frac{1}{h'(E_i)}. \quad (\text{II. 54}) \end{aligned}$$

Контур интегрирования  $C$  в  $p_0$ -плоскости начинается в  $+\infty$  выше разреза, идет в точку ветвления  $\omega = m_\theta$  и в ней переходит на нижний берег разреза, проходя далее в  $+\infty$ . Если его деформировать в окружность бесконечного радиуса, то останутся интегралы, равные вычетам в полюсах функции  $1/h(\omega)$ , которые дают члены  $-1/h'(E)$ .

Так как все матричные элементы  $c$  в пределе при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  и  $g_0^2 \rightarrow 0$  становятся бесконечными, оператор  $\psi_V$  удобно перенормировать, введя

$$\psi_{V_r} = \frac{g_0}{g} \psi_V, \quad \psi_{V_r}^* = \left( \frac{g_0}{g} \right)^* \psi_V = - \frac{g_0}{g} \psi_V. \quad (\text{II. 55})$$

Тогда при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  мы имеем

$$\{\psi_{V_r}, \psi_{V_r}^*\} = 0. \quad (\text{II. 56})$$

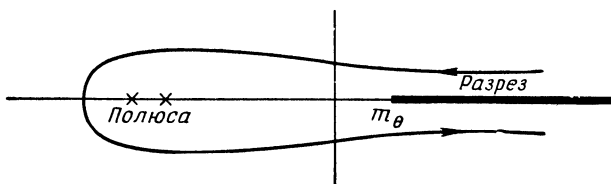
Если использовать представление, в котором векторы состояния постоянны, а операторы являются функциями времени  $t^1$ , то антикоммутатор примет вид

$$\begin{aligned} \langle 0 | \{\psi_{V_r}(t), \psi_{V_r}^*(t')\} | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{g^2} \left[ \sum_l \frac{e^{iE_l(t'-t)}}{h'(E_l)} + \int_0^{\infty} \frac{k^2 e^{iE(t'-t)} dk}{2E h^+(E) h^-(E)} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i g^2} \int_{C'} \frac{d\omega}{h(\omega)} e^{i\omega(t'-t)}. \quad (\text{II. 57}) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> То есть гейзенберговское представление. — Прим. ред.

Контур интегрирования  $C'$  теперь дается фиг. 9, и он соответствует обычному контуру  $\Delta$ -функции (I.3). Формула (II.57) применима и в случае двойного полюса.

Как видно из (II.54), (II.55) и (II.57), перенормированный оператор  $\psi_V$ , обладает конечным матричным элементом перехода из вакуума в любое из состояний (II.12). Антискоммутатор  $\{\psi_V, \psi_V^*\}$  при равных временах исчезает. Как и в приближенной двухточечной



Фиг. 9.

функции (3.39), вклады от непрерывного спектра компенсируются вкладами двойного полюса. Функция  $h(\omega)$  играет ту же роль, что и  $S^{-1}(p)$  в релятивистской теории поля.

### § 6. Роль призрачных состояний в задачах рассеяния

Описание физических явлений требует унитарности  $S$ -матрицы. Поэтому важно выяснить, каким образом для построения такой унитарной  $S$ -матрицы можно использовать гильбертово пространство с индефинитной метрикой и его призрачные состояния.

Мы начнем с сектора  $\begin{pmatrix} N+2\theta \\ V+\theta \end{pmatrix}$ , в котором  $N$ -состоянием могут рассеиваться две частицы  $\theta$  или же после испускания одной  $\theta$ -частицы может остаться  $V$ -состояние призрачного типа.

В этом секторе вектор состояния можно представить двумя волновыми функциями

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(\mathbf{k}), \\ \varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \end{cases} \quad (\text{II. 58})$$

Из уравнения  $H\Phi = E\Phi$  получаем для состояний рассеяния  $E > 2m_0$

$$\varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \varphi_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \frac{g_0}{2\sqrt{4\pi}(\omega_1 + \omega_2 - E - i\gamma)} \left[ \frac{\varphi(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_1}} + \frac{\varphi(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_2}} \right] \quad (\text{II. 59})$$

(где  $\gamma \rightarrow 0$ ); здесь  $\varphi_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  — произвольная функция  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ , удовлетворяющая условию

$$(\omega_1 + \omega_2 - E)\varphi_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0. \quad (\text{II. 60})$$

Второе уравнение Шредингера имеет вид

$$h^+(E - \omega)\varphi(\mathbf{k}) = -\frac{1}{8\pi} \int \frac{d^3k'\varphi(\mathbf{k}')}{\sqrt{\omega\omega'}(\omega + \omega' - E - i\gamma)} - \varphi_{0i}(\mathbf{k}), \quad (\text{II. 61})$$

где

$$\varphi_{0i}(\mathbf{k}) = \frac{2}{g_0\sqrt{4\pi}} \int \frac{d^3k'\varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega'}}. \quad (\text{II. 62})$$

Мы рассмотрим лишь случай полного углового момента, равного нулю. Тогда  $\varphi(\mathbf{k})$  является функцией только от абсолютного значения  $k$ .

Уравнение (II. 61) говорит о том, что  $\varphi(k)$  как функция  $k$  имеет сингулярность в точке  $\omega = \omega_c = E - E_0$ , где  $E_0$  — энергия двойного полюса. Так как  $h^+(E - \omega)$  в этой точке имеет двойной полюс, поведение  $\varphi(k)$  зависит от того, исчезает ли в критической точке правая часть уравнения (II. 61). Если она отлична от нуля, то для  $\varphi(k)$  мы получим поведение типа

$$\varphi(k) = a\delta(E - E_0 - \omega) + b\delta'(E - E_0 - \omega) + \frac{\chi(k)}{(E - E_0 - \omega)^2}. \quad (\text{II. 63})$$

Такие решения, несомненно, существуют, но найти им какую-либо физическую интерпретацию трудно. Фурье-преобразование из импульсного пространства в обычное показывает, что решения типа (II. 63) не соответствуют сходящимся и расходящимся сферическим волнам вида  $\exp(\pm ik_c r)/r$ ; они соответствуют выражениям типа  $[(\alpha + \beta r)/r] \exp(\pm ik_c r)$  (ср. аналогичные выражения из § 2 гл. 5), которые нельзя использовать для описания реальных явлений.

Если правая часть (II. 61) в критической точке исчезает, то получается другой тип решения. Тогда мы имеем

$$\varphi(k) = a\delta(E - E_0 - \omega) + \frac{\chi(k)}{E - E_0 - \omega + i\gamma}. \quad (\text{II. 64})$$

Важно отметить, что произвольный коэффициент  $a$  перед  $\delta$ -функцией, входящей в (II. 64), можно использовать так, чтобы в критической точке правая часть (II. 61) исчезала. Поэтому в действительности можно найти группу решений уравнения (II. 61) с поведением (II. 64), но константу  $a$  выбирать произвольно нельзя. Подстановка (II. 64) в условие того, чтобы при  $\omega = \omega_c = E - E_0$  правая часть (II. 61) обращалась в нуль, дает

$$a \frac{k_c}{2(\omega_c - E_0)} = - \frac{1}{8\pi} \int \frac{d^3 k' \chi(k')}{\sqrt{\omega_c \omega'} (\omega_c + \omega' - E - i\gamma) (E - E_0 - \omega' + i\gamma)}. \quad (\text{II. 65})$$

[Так как  $\varphi_{0i}(k)$  может отличаться от нуля, лишь если  $m_\theta \leq \omega \leq E - m_\theta$ , то при  $k = k_c$  последний член  $\varphi_{0i}(k)$ , входящий в (II. 61), исчезает.] Для  $\chi(k)$  возникает интегральное уравнение

$$\chi(k) = - \frac{(\omega_c - \omega)^2}{8\pi h^+ (E - \omega)} \times \int \frac{d^3 k' \chi(k')}{\sqrt{\omega \omega'} (\omega + \omega_c - E) (\omega + \omega' - E - i\gamma) (\omega_c + \omega' - E - i\gamma)} - \frac{\omega_c - \omega}{h^+ (E - \omega)} \varphi_{0i}(k). \quad (\text{II. 66})$$

В точке  $\omega = \omega_c$  правая часть автоматически регулярна, и поэтому  $\chi(k)$  также регулярна.

Путем преобразования Фурье можно перейти к представлению вектора состояния  $|\Phi\rangle$  через функции в обычном пространстве

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), \\ \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{cases} \quad (\text{II. 67})$$

Из-за наличия полюсов в правой части (II. 64) функции  $\varphi(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  содержат члены, которые ведут себя подобно сходящимся или расходящимся волнам типа

$(1/r) \exp(\pm ik_c r)$ . Сравнение решений в секторах  $\binom{N+2\theta}{V+\theta}$  и  $\binom{N+\theta}{V}$  показывает, что эти члены можно записать в виде произведения  $(1/r) \exp(ik_c r)$  на волновую функцию прозрачного состояния  $\Phi_0$  из  $\binom{N+\theta}{V}$ . Так как норма  $\Phi_0$  равна нулю, а норма произведения состояний равна произведению норм сомножителей, то норма этих вкладов исчезает.

Из этого результата видно, что унитарную  $S$ -матрицу можно построить из решений типа (II. 64). Асимптотическая часть волновой функции, которая определяет  $S$ -матричные элементы, содержит волны типа  $N+2\theta$  и  $V+\theta$ , но последние входят лишь в виде  $\Phi_0+\theta$ . Асимптотические волны типа  $\Phi_{\text{дип}}+\theta$  не появляются. Так как  $N$ - и  $\theta$ -состояния имеют положительную норму, то это же справедливо и для вкладов  $N+2\theta$ . Вклады  $\Phi_0+\theta$  обладают нулевой нормой и ортогональны к  $N+2\theta$ . Следовательно, благодаря псевдоэрмитовости гамильтониана (II. 35)  $S$ -матрица, связывающая сходящиеся волны с расходящимися, является матрицей псевдоунитарного преобразования в пространстве с полуопределенной метрикой. Этого достаточно для утверждения, что  $S$ -матрица унитарна, и при физической интерпретации вклады с нулевой нормой можно просто опустить.

Переводя эти рассуждения на язык теории поля (как это сделано в § 4 гл. 3), можно сказать, что условие (II. 65) приводит к исчезновению вершины, определяющей взаимодействие, в точке двойного полюса. Тем самым двойной полюс функции  $\varphi(k)$ , входящей в (II. 61), превращается в простой; следовательно, в асимптотических волнах может появиться прозрачное состояние  $\Phi_0$ , но не дипольное  $\Phi_{\text{дип}}$  и  $S$ -матрица действует в пространстве с полуопределенной метрикой, что достаточно для доказательства ее унитарности.

В более общих секторах  $\binom{N+z\theta}{V+(z-1)\theta}$  ситуация по существу остается такой же, и поэтому доказательство существования решений, определяющих унитарную  $S$ -матрицу, здесь повторяться не будет.



Для полноты анализа модели важно также выяснить, существуют ли в каком-нибудь из этих секторов дискретные стационарные состояния, которые в более высоких секторах могли бы появиться в асимптотических состояниях процесса рассеяния.

Мы докажем, что таких дискретных состояний не существует. Вектор состояния в секторе  $\left( \begin{matrix} N + z\theta \\ V + (z-1)\theta \end{matrix} \right)$  можно представить следующим образом:

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(k_1 k_2 \dots k_{z-1}), \\ \varphi(k_1 k_2 \dots k_z), \end{cases} \quad (\text{II. 68})$$

где  $\varphi$  — функции, симметричные относительно перестановок  $k_1, k_2, \dots$ .

Для дискретного состояния полная энергия  $E$  должна быть меньше, чем  $zm_\theta$ . Уравнение Шредингера, соответствующее (II. 61), для дискретных состояний ( $\varphi_{0i} = 0$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(k_1 \dots k_{z-1}) h \left( E - \sum_{i=1}^{z-1} \omega_i \right) = \\ = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 k_z}{V \sqrt{2\omega_z} \left( \sum_{i=1}^z \omega_i - E \right)} \sum_{j=1}^{z-1} \frac{\varphi(k_1 \dots k_{j-1} k_{j+1} \dots k_z)}{V \sqrt{2\omega_j}}. \end{aligned} \quad (\text{II. 69})$$

Умножение этого выражения на  $\varphi^*(k_1 \dots k_{z-1})$  и интегрирование по  $d^3 k_1 \dots d^3 k_{z-1}$  дает

$$\begin{aligned} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_{z-1} |\varphi(k_1 \dots k_{z-1})|^2 h \left( E - \sum_{i=1}^{z-1} \omega_i \right) = \\ = - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\alpha \int d^3 k_1 \dots d^3 k_z \frac{1}{V \sqrt{2\omega_z}} e^{-\alpha \left( \sum_{i=1}^z \omega_i - E \right)} \times \\ \times \sum_{j=1}^{z-1} \frac{\varphi(k_1 \dots k_{j-1} k_{j+1} \dots k_z)}{V \sqrt{2\omega_j}} \varphi^x(k_1 \dots k_{z-1}). \end{aligned} \quad (\text{II. 70})$$

Здесь использовалось соотношение

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^z \omega_i - E} = \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha \left( \sum_{i=1}^z \omega_i - E \right)}. \quad (\text{II. 71})$$

Так как  $\sum_{i=1}^z \omega_i - E > 0$ , то оно справедливо.

Полагая

$$A(k_1 \dots k_{z-2}) = \int d^3 k_{z-1} \frac{\varphi(k_1 \dots k_{z-1})}{\sqrt{2\omega_{z-1}}} e^{-\alpha \omega_{z-1}}, \quad (\text{II. 72})$$

можно записать правую часть (II. 70) как


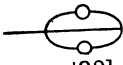
$$-\frac{z-1}{4\pi} \int d\alpha \int d^3 k_1 \dots d^3 k_{z-2} e^{-\alpha \left( \sum_{i=1}^{z-2} \omega_i - E \right)} | A(k_1 \dots k_{z-2})^2 | \quad (\text{II. 73})$$

[используется симметрия  $\varphi(k_1 \dots k_{z-1})$  относительно перестановок  $k_1, k_2, \dots, k_{z-1}$ ]. Поэтому несомненно, что правая часть (II. 70) отрицательна. С другой стороны, так как  $h(z)$  в области  $-\infty < z \leq m_\theta$  никогда не отрицательна, левая часть обязательно положительна. Следовательно, если бы существовало дискретное состояние, то равенство (II. 70) приводило бы к противоречию. Поэтому дискретные состояния не появляются.

Модель, проанализированная в этом приложении, была введена Ли с тем, чтобы изучить следствия типичных расходимостей, возникающих в локальных релятивистских теориях поля. Относительно поведения  $\theta$ -частиц модель можно назвать релятивистской, но в сущности не локальной; она указывает на существование характерных расходимостей в пределе  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$  [см. (II. 31)]. Тем не менее она гораздо проще, чем настоящая релятивистская теория взаимодействующих полей. Появляющиеся в модели расходимости заставляют ввести в гильбертово пространство индефинитную метрику. При таком расширении рамок обычной квантовой теории математическая схема становится непротиворечивой и не приводит к непредвиденным бесконечностям. Схема разре-

шает построение унитарной  $S$ -матрицы и допускает соответствующую физическую интерпретацию. Поэтому она представляется подходящей моделью для математической структуры нелинейной спинорной теории.

### III. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Интегральные операторы типа  или  удобно вычислять методами, развитыми Фейнманом [93]. В качестве примера мы явно вычислим интеграл, появляющийся в (5.11):

$$K_{\mu\nu} = - \int d^4p \frac{-g_{\mu\nu}(p, J-p) + p_\mu(J-p)_\nu + p_\nu(J-p)_\mu}{(p^2)^2(p^2 - \kappa^2)(J-p)^2}. \quad (III. 1)$$

Основная идея метода Фейнмана заключается в том, что посредством соотношения

$$\int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} = \frac{1}{ab} \quad (III. 2)$$

или его производных сложный интеграл сводится к стандартному виду

$$\int \frac{d^4p}{(p^2 + a^2)^3}.$$

Так как в тексте все интегралы получаются из хронологически упорядоченных произведений операторов, интегрирование по  $p_0$  можно проводить вдоль действительной оси, если  $p^2$  заменить пределом  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (p^2 + i\delta)$ . В этом случае для стандартного интеграла получим

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(p^2 + a^2)^3} &= \frac{i}{2} \int d^4p \int_0^\infty d\alpha \alpha^2 e^{i\alpha(p^2 + a^2)} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty dae^{iaa^2} = \frac{i\pi^2}{2a^2}. \quad (III. 3) \end{aligned}$$

Дифференцируя это соотношение, будем иметь

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + a^2)^4} = \frac{i\pi^2}{6a^4}, \quad \int d^4 p \frac{p^2}{(p^2 + a^2)^4} = \frac{i\pi^2}{3a^2}. \quad (\text{III. 4})$$

Знаменатель интеграла  $K_{\mu\nu}$  (III. 1). можно преобразовать с помощью соотношений, возникающих при дифференцировании (III. 2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2) (J - p^2)} &= \int_0^1 \frac{2x dx}{[p^2 - \kappa^2 (1-x)]^3 (J-p)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{6xy^2}{[p^2 - \kappa^2 (1-x)y + J^2(1-y) - 2Jp(1-y)]^4} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{6xy^2}{\{[p - J(1-y)]^2 - \kappa^2(1-x)y + J^2(1-y)y\}^4}. \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

В знаменателе  $K_{\mu\nu}$  (III. 1) удобно  $p$  заменить на  $p' + J(1-y)$ . Тогда члены, линейные по  $p'_\mu$ , в интеграле можно опустить, и мы получим

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= - \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int d^4 p' \times \\ &\times \frac{6xy^2 \left\{ -g_{\mu\nu} \left[ J^2(1-y)y - \frac{1}{2} p'^2 \right] + 2J_\mu J_\nu y(1-y) \right\}}{[p'^2 - \kappa^2(1-x)y + J^2(1-y)y]^4} = \\ &= -i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{xy [-g_{\mu\nu} \kappa^2(1-x) + 2J_\mu J_\nu(1-y)]}{[J^2(1-y) - \kappa^2(1-x)]^2} \end{aligned} \quad (\text{III. 6})$$

или, заменяя  $x$  на  $1-x$  и  $y$  на  $1-y$ ,

$$K_{\mu\nu} = -i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{(1-x)(1-y) [-g_{\mu\nu} \kappa^2 x + 2J_\mu J_\nu y]}{(J^2 y - \kappa^2 x)^2}.$$

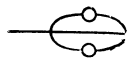
После неполного интегрирования приходим к

$$\begin{aligned}
 K_{\mu\nu} &= -\frac{i\pi^2}{J^2} \int_0^1 dx (1-x) \times \\
 &\quad \times \left[ g_{\mu\nu} + \int_0^1 dy \frac{g_{\mu\nu} \kappa^2 x + 2(1-2y) J_\mu J_\nu}{J^2 y - \kappa^2 x} \right] = \\
 &= -\frac{i\pi^2}{J^2} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ g_{\mu\nu} \left( 1 + \frac{\kappa^2 x}{J^2} \ln \frac{-J^2 + \kappa^2 x}{\kappa^2 x} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4J_\mu J_\nu}{J^2} \left[ -1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 x}{J^2} \right) \ln \frac{-J^2 + \kappa^2 x}{\kappa^2 x} \right] \right\}. \quad (\text{III. 7})
 \end{aligned}$$

Полагая  $J^2/\kappa^2 = \lambda$ , окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 K_{\mu\nu} &= -\frac{i\pi^2}{2\kappa^2} \left\{ g_{\mu\nu} \left[ \left( 1 - \frac{2}{3} \lambda \right) \ln \lambda + \frac{1}{3\lambda} + \frac{2}{3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3}{3\lambda^2} \ln |1 - \lambda| \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{J_\mu J_\nu}{J^2} \left[ \frac{2}{3} \lambda \ln \lambda - \frac{4}{3\lambda} - \frac{2}{3} - \frac{4 - 6\lambda + 2\lambda^3}{3\lambda^2} \ln |1 - \lambda| \right] \right\}. \quad (\text{III. 8})
 \end{aligned}$$

Это выражение и подставлялось в (5.11) и (5.12). В (III. 8) под знаком логарифма стоит знак модуля; это показывает, что взято главное значение, как и обсуждалось в § 1 гл. 5.

Другие интегралы, подобные , значительно более сложны, но и они вычисляются такими же методами.

#### IV. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ НАБОРОВ ФУНКЦИЙ <sup>1)</sup>

Бесконечные наборы функций, введенные в § 2 гл. 4 в качестве представителей векторов состояния, можно выразить посредством функционалов, которые указывают их характерные свойства в очень компактной форме.

<sup>1)</sup> См. работы [67, 126, 127].

Чтобы построить эти функционалы, мы вводим «поле»  $\xi(x)$ ,  $\xi^*(x)$ , которое, подобно  $\chi(x)$ , является вейлевским спинором в лоренцевом пространстве и спинором в изопространстве. Однако мы не предполагаем, что трансформационные свойства  $\xi(x)$  и  $\xi^*(x)$  такие же, как у  $\chi(x)$ . Примем, что в лоренцевом пространстве  $\xi^*(x)$  преобразуется аналогично  $c\chi$  (где  $\sigma_k = -c^{-1}\sigma_k^T c$ ), а  $\xi(x)$  — как  $\chi^* c^*$ ; в изопространстве  $\xi(x)$  преобразуется аналогично  $\chi$ , а  $\xi^*(x)$  — как  $\chi^*$ . Таким образом, величина  $\chi(x)\xi^*(x)$  инвариантна относительно преобразований Лоренца и вращений в изопространстве.

Предполагается, что произведение любых двух таких  $\xi$ -переменных является  $c$ -числом, т. е. оно коммутирует со всеми другими величинами. Но в то же время мы принимаем, что при любой точке  $y$   $\xi(x)$  или  $\xi^*(x)$  антикоммутирует с  $\xi(y)$ ,  $\xi^*(y)$ ,  $\chi(y)$ ,  $\chi^*(y)$ . Это следует понимать просто как рецепт, по которому выполняются формальные операции с полями  $\xi(x)$ , без какой-либо попытки построить гильбертово пространство, в котором эти поля  $\xi(x)$  могли бы действовать как операторы.

Затем мы определяем функционал

$$\tilde{T} = T \exp \left\{ -i \int dx [\chi(x)\xi^*(x) + \xi(x)\chi^*(x)] \right\}. \quad (\text{IV. 1})$$

(Как и обычно, символ  $T$  означает хронологически упорядоченное произведение.)

С его помощью  $\tau$ -функции, используемые в тексте, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) &= \langle 0 | T \chi(x_1) \chi(x_2) \dots \chi^*(y_1) \chi^*(y_2) \dots | \psi \rangle = \\ &= (-i)^m i^n \frac{\delta}{\delta \xi^*(x_1)} \frac{\delta}{\delta \xi^*(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta \xi(y_1)} \frac{\delta}{\delta \xi(y_2)} \dots \\ &\dots \langle 0 | \tilde{T} | \psi \rangle \quad \text{при } \xi = \xi^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV. 2})$$

Здесь  $m$  и  $n$  — полное число переменных  $\chi$  и  $\chi^*$  соответственно в  $\tau$ -функции. Таким же образом можно определить и функционал  $\tilde{\Phi}$ :

$$\tilde{\Phi} = \exp \left[ \int \langle 0 | T \chi(x) \chi^*(y) | 0 \rangle \xi^*(x) \xi(y) dx dy \right] \tilde{T}. \quad (\text{IV. 3})$$

Тогда  $\varphi$ -функция (4.2) будет определяться формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) &= \\ &= (-i)^m i^n \frac{\delta}{\delta \xi^*(x_1)} \frac{\delta}{\delta \xi^*(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta \xi(y_1)} \frac{\delta}{\delta \xi(y_2)} \dots \langle 0 | \tilde{\Phi} | \psi \rangle \\ &\quad \text{при } \xi = \xi^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV. 4})$$

В этом можно убедиться, подставляя

$$\tilde{T} = \exp \left[ - \int \langle 0 | T \chi(x) \chi^*(y) | 0 \rangle \xi^*(x) \xi(y) dx dy \right] \tilde{\Phi} \quad (\text{IV. 5})$$

в (IV.2) и сравнивая результат с (4.2).

Аналогично  $\eta$ -функции можно получить из

$$\tilde{H} = \ln \langle 0 | \tilde{T} | 0 \rangle, \quad (\text{IV. 6})$$

а именно

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) &= \\ &= (-i)^m i^n \frac{\delta}{\delta \xi^*(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \xi(y_1)} \dots \tilde{H} \text{ при } \xi = \xi^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV. 7})$$

Это соотношение снова можно проверить, подставляя

$$\langle 0 | \tilde{T} | 0 \rangle = e^{\tilde{H}}$$

в (IV.2) и сравнивая с (4.3).

Наконец,  $\zeta$ -функции получаются из функционала

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{T}}{\langle 0 | \tilde{T} | 0 \rangle} \quad (\text{IV. 8})$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots) &= \\ &= (-i)^m i^n \frac{\delta}{\delta \xi^*(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \xi(y_1)} \dots \tilde{Z} \text{ при } \xi = \xi^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV. 9})$$

Из (IV.8) и (IV.9) сразу можно видеть, что все  $\zeta$ -функции для переходов из вакуума в вакуум обращаются в нуль.

Фундаментальное полевое уравнение (3.1) можно записать в виде соотношения для функционала  $\tilde{T}$ :

$$\left( i \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{\delta}{\delta \xi_{\beta\lambda}^*(x)} + l^2 \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \sigma_{\nu, \gamma\delta} : \frac{\delta}{\delta \xi_{\beta\lambda}^*(x)} \frac{\delta}{\delta \xi_{\gamma\mu}(x)} \frac{\delta}{\delta \xi_{\delta\mu}^*(x)} : \right) \tilde{T} = 0. \quad (\text{IV. 10})$$

Символ  $::$  определяется так же, как и в (3.3):

$$\begin{aligned} &: \frac{\delta}{\delta \xi^*(x)} \frac{\delta}{\delta \xi(x)} \frac{\delta}{\delta \xi^*(x)} : = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\delta}{\delta \xi^*(x)} \frac{\delta}{\delta \xi(x + \delta)} \frac{\delta}{\delta \xi^*(x + \delta + \varepsilon)} - \right. \\ &\left. - F(x, x + \delta) \frac{\delta}{\delta \xi^*(x + \delta + \varepsilon)} + F(x + \varepsilon + \delta, x + \delta) \frac{\delta}{\delta \xi^*(x)} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя, например, (IV. 5) в (IV. 10), можно использовать это уравнение, скажем, для вывода уравнения (4.14) Тамма — Данкова, которое формулирует фундаментальное уравнение (3.1) в терминах  $\varphi$ -функций.

Функциональное исчисление удобно для того, чтобы показать характерные свойства четырех различных наборов функций, описанных в тексте. Однако оно не оказывает существенной помощи при расчетах, необходимых для определения собственных значений или констант связи. Методы, которые использовали бы функциональное исчисление для окончательных численных расчетов, пока не развиты.

## V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ ФУНКЦИЙ

В связи с уравнениями на собственные значения, обсуждавшимися в гл. 5, 7 и 8, были определены некоторые функции действительной положительной переменной  $\lambda$ , которые получаются как главные значения конкретных фейнмановских интегралов.

На действительной оси они представляют действительные части аналитических функций комплексной переменной  $\lambda$ . В комплексной  $\lambda$ -плоскости на некоторых участках действительной оси будут существовать разрывы. Здесь мы приведем эти функции вместе с их приближенными выражениями при  $\lambda \ll 1$  и  $\lambda \gg 1$  в виде графиков и численных таблиц, которые могут быть полезными при расчетах.



В § 1 гл. 5 определены две функции  $q_0(\lambda)$  и  $q_1(\lambda)$ :

$$q_0(\lambda) = \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2} \ln |1-\lambda|,$$

$$q_0(\lambda) \approx \begin{cases} \ln \lambda - \frac{3}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{12} + \dots & \text{при } \lambda \ll 1, \\ \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \ln \lambda - \frac{3}{2\lambda^2} + \dots & \text{при } \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (\text{V. 1})$$

$$q_1(\lambda) = \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) \ln \lambda + \frac{2}{3} + \frac{1}{3\lambda} + \frac{(1-\lambda)^2(1+2\lambda)}{3\lambda^2} \ln |1-\lambda|,$$

$$q_1(\lambda) \approx \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) \ln \lambda + \frac{1}{2} + \frac{8}{9}\lambda - \frac{\lambda^2}{4} + \dots & \text{при } \lambda \ll 1, \\ \frac{1}{3\lambda^2} \ln \lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{5}{18\lambda^2} + \dots & \text{при } \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (\text{V. 2})$$

Эти две функции тесно связаны с функцией  $r(\lambda)$ , введенной в § 5 гл. 7 в связи с фермионным уравнением на собственные значения. Величина  $r(\lambda)$  определяет ту часть массы фермиона, которая обусловлена рождением и уничтожением бозонов:

$$r(\lambda) = (2-\lambda) \ln \lambda + 1 + \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} \ln |1-\lambda|,$$

$$r(\lambda) \approx \begin{cases} (2-\lambda) \ln \lambda + \frac{3}{2}\lambda - \frac{\lambda^2}{3} + \dots & \text{при } \lambda \ll 1, \\ \frac{1}{\lambda} \ln \lambda + \frac{3}{2\lambda} - \frac{1}{3\lambda^2} + \dots & \text{при } \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (\text{V. 3})$$

Три функции  $q_0(\lambda)$ ,  $q_1(\lambda)$  и  $r(\lambda)$  связаны соотношениями

$$r(\lambda) = \frac{1}{2} q_0(\lambda) + \frac{3}{2} q_1(\lambda),$$

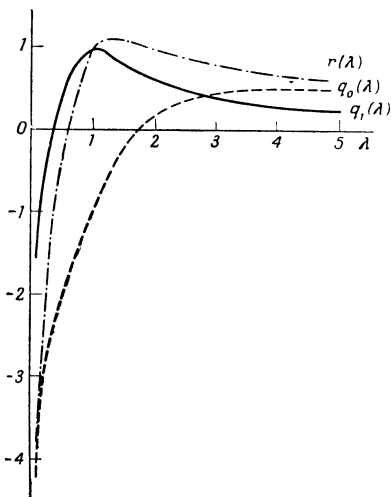
$$q_0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} r\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (\text{V. 4})$$

$$q_1(\lambda) = \frac{2}{3} r(\lambda) + \frac{1}{3\lambda} r\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

которые сразу же можно получить из (V. 1) — (V. 3). На фиг. 10 приведены графики трех функций в области

$0 < \lambda \leq 5$ . Их численные значения даются таблицей в конце этого приложения.

Функции  $q_0(\lambda)$ ,  $q_1(\lambda)$  и  $r(\lambda)$  получены из двухточечной функции (3.39), в которой предполагается наличие лептонного двойного полюса при нулевой массе. Этого приближения недостаточно для фотонного уравнения на



Фиг. 10.

собственные значения или для вычисления электромагнитных поправок к массам. Поэтому были введены функции  $q(\lambda, \varepsilon)$ , которые получаются из  $q(\lambda)$  путем перехода в лептонном двойном полюсе от нулевой массы к среднему значению массы  $\mu$  заряженных лептонов ( $\varepsilon = \mu^2/\kappa^2$ ). В этом случае входящее в двухточечную функцию выражение

$$\frac{(\kappa^2)^2}{(p^2)^2 (p^2 - \kappa^2)}$$

следует заменить на

$$\left( \frac{\kappa^2 - \mu^2}{p^2 - \mu^2} \right)^2 \frac{1}{p^2 - \kappa^2}.$$

Для учета возникающих в интеграле  $K_{\mu\nu}$  (III. 1) изменений удобно ввести безразмерные переменные  $p' = p/\sqrt{J^2}$  и  $j = J/\sqrt{J^2}$ . Тогда (III. 1) можно записать как  $k^2 K_{\mu\nu} =$

$$= \int d^4 p' \frac{-g_{\mu\nu}(p', j-p') + p'_\mu(j-p')_\nu + p'_\nu(j-p')_\mu}{(p'^2)^2 (p'^2 \lambda - 1) (j-p')^2}. \quad (\text{V. 5})$$

В этом интеграле выражение

$$f(\lambda) = \frac{1}{(p'^2)^2 (p'^2 \lambda - 1)} \quad (\text{V. 6})$$

нужно заменить на

$$f(\lambda, \varepsilon) = \left[ \frac{1 - \varepsilon}{p'^2 - (\varepsilon/\lambda)} \right]^2 \frac{1}{p'^2 \lambda - 1}. \quad (\text{V. 7})$$

Путем дифференцирования легко установить, что функции  $f(\lambda)$  и  $f(\lambda, \varepsilon)$  связаны соотношением

$$f(\lambda, \varepsilon) = f(\lambda) - f\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda}{\varepsilon}(1 - \varepsilon) \frac{df(\lambda/\varepsilon)}{d(\lambda/\varepsilon)}. \quad (\text{V. 8})$$

Поэтому для функций  $q$  имеет место такое же равенство

$$q(\lambda, \varepsilon) = q(\lambda) - q\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda}{\varepsilon}(1 - \varepsilon) \frac{dq(\lambda/\varepsilon)}{d(\lambda/\varepsilon)}. \quad (\text{V. 9})$$

Оно использовано в (8.23) для вычисления  $q_1(\lambda, \varepsilon)$ . В общем случае (V. 9) приводит к

$$\begin{aligned} q_0(\lambda, \varepsilon) &= \\ &= \ln|\varepsilon - \lambda| - \frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda^2} \ln|1 - \lambda| - \frac{1 - 3\varepsilon + 2\varepsilon^2}{\lambda} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} (3\varepsilon - 4\lambda - 2\varepsilon^2 + 2\lambda\varepsilon) \ln\left|\frac{\varepsilon - \lambda}{\varepsilon}\right|, \\ q_0(\lambda, \varepsilon) &\approx \begin{cases} \ln|\varepsilon - \lambda| + 1 - \varepsilon + \frac{\lambda}{\varepsilon} + \dots & \text{при } \lambda \ll \varepsilon, \lambda \ll 1, \\ q_0(\lambda) + \frac{2\varepsilon}{\lambda} - \frac{4\varepsilon}{\lambda} \ln\left|\frac{\lambda}{\varepsilon}\right| + \dots & \text{при } \varepsilon \ll \lambda, \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (\text{V. 10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(\lambda, \varepsilon) &= \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) \ln|\varepsilon - \lambda| + \\ &+ \frac{(1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda)}{3\lambda^2} \ln|1 - \lambda| + \frac{1 - \varepsilon}{3\lambda} (1 - 2\varepsilon + 2\lambda) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \ln\left|\frac{\varepsilon - \lambda}{\varepsilon}\right|, \\ q_1(\lambda, \varepsilon) &\approx \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) \ln|\varepsilon - \lambda| + 1 - \varepsilon + \\ + \frac{\lambda}{3\varepsilon} + \frac{2\lambda}{3} + \dots & \text{при } \lambda \ll \varepsilon, \lambda \ll 1, \\ q_1(\lambda) - 2\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{2\varepsilon}{3} + \dots & \text{при } \varepsilon \ll \lambda, \varepsilon \ll 1. \end{cases} \quad (\text{V. 11}) \end{aligned}$$



Интеграл  $L(\lambda)$  можно представить через более простые аналитические функции в следующем виде:

$$L(\lambda) = -\frac{1}{24} \left(1 + 2\pi^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{24} \left(12 - 8\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) \ln \lambda + \\ + \frac{1}{24\lambda^2} (7 - 9\lambda + 15\lambda^2 - \lambda^3) (1 - \lambda) \ln |1 - \lambda| - \\ - \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda^2} f(\lambda) - \frac{1}{4} \left(6 + \lambda + 7\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{2}\right) g(\lambda) - \frac{1}{2} h(\lambda), \quad (V. 13)$$

где

$$f(\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{8} \operatorname{arctg}^2 \frac{(2-\lambda) \sqrt{\lambda(4-\lambda)}}{\lambda^2 - 4\lambda + 2} & \text{при } 0 \leq \lambda \leq 4, \\ -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{8} \ln^2 \left| \frac{\lambda - 2 - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{\lambda - 2 + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \right| & \text{при } \lambda > 4; \end{cases} \quad (V. 14)$$

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\lambda(4-\lambda)}}{12\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{(2-\lambda) \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{\lambda^2 - 4\lambda + 2} & \text{при } 0 < \lambda \leq 4, \\ \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{12\lambda^2} \ln \left| \frac{\lambda - 2 - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{\lambda - 2 + \sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \right| & \text{при } \lambda > 4; \end{cases} \quad (V. 15)$$

$$h(\lambda) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n^2} & \text{при } 0 \leq \lambda \leq 1, \\ \frac{\pi^2}{6} & \text{при } \lambda = 1, \\ -h\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 \lambda + \frac{\pi^2}{3} & \text{при } \lambda \geq 1. \end{cases} \quad (V. 16)$$

График функции  $L(\lambda)$  приведен в § 3 гл. 5 (см. фиг. 3). Для малых значений  $\lambda$  первыми членами разложения являются

$$L(\lambda) \approx \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln \lambda + \dots \quad \text{при } \lambda \ll 1. \quad (V. 17)$$

Таблица 3

$\lambda$	$q_0(\lambda)$	$q_1(\lambda)$	$r(\lambda)$	$L(\lambda)$
0,1	-3,7684	-1,5628	-4,2283	0,7093
0,2	-3,0391	-0,7277	-2,6110	0,2923
0,3	-2,5954	-0,2211	-1,6293	0,0392
0,4	-2,2669	0,1384	-0,9258	0,1411
0,5	-2,0000	0,4091	-0,3863	-0,2782
0,6	-1,7703	0,6171	0,0405	-0,3854
0,7	-1,5641	0,7757	0,3815	-0,4702
0,8	-1,3726	0,8920	0,6518	-0,5367
0,9	-1,1880	0,9684	0,8585	-0,5878
1,0	-1,0000	1,0000	1,0000	-0,6247
1,1	-0,7948	0,9748	1,0648	-0,6471
1,2	-0,6063	0,9302	1,0922	-0,6560
1,3	-0,4427	0,8811	1,1003	-0,6542
1,4	-0,3030	0,8324	1,0972	-0,6444
1,5	-0,1842	0,7862	1,0872	-0,6288
1,6	-0,0832	0,7431	1,0731	-0,6090
1,7	0,0029	0,7033	1,0563	-0,5862
1,8	0,0763	0,6667	1,0382	-0,5616
1,9	0,1392	0,6331	1,0193	-0,5358
2,0	0,1931	0,6023	1,0000	-0,5094
2,1	2,2396	0,5740	0,9807	-0,4829
2,2	0,2797	0,5479	0,9616	-0,4566
2,3	0,3143	0,5238	0,9429	-0,4308
2,4	0,3443	0,5016	0,9246	-0,4056
2,5	0,3703	0,4811	0,9068	-0,3813
2,6	0,3929	0,4620	0,8895	-0,3579
2,7	0,4125	0,4443	0,8727	-0,3354
2,8	0,4296	0,4278	0,8565	-0,3141
2,9	0,4444	0,4124	0,8408	-0,2938
3,0	0,4572	0,3980	0,8256	-0,2746
3,1	0,4683	0,3845	0,8109	-0,2565
3,2	0,4780	0,3718	0,7968	-0,2394
3,3	0,4863	0,3600	0,7831	-0,2235
3,4	0,4934	0,3490	0,7699	-0,2087
3,5	0,4996	0,3382	0,7571	-0,1948
3,6	0,5048	0,3282	0,7447	-0,1820
3,7	0,5092	0,3188	0,7328	-0,1701
3,8	0,5128	0,3099	0,7213	-0,1591
3,9	0,5159	0,3014	0,7101	-0,1490
4,0	0,5183	0,2934	0,6993	-0,1397

Продолжение табл. 3

$\lambda$	$q_0(\lambda)$	$q_1(\lambda)$	$r(\lambda)$	$L(\lambda)$
4,1	0,5203	0,2858	0,6888	-0,1312
4,2	0,5218	0,2785	0,6787	-0,1233
4,3	0,5229	0,2716	0,6689	-0,1161
4,4	0,5236	0,2650	0,6593	-0,1094
4,5	0,5240	0,2587	0,6501	-0,1032
4,6	0,5241	0,2527	0,6411	-0,0974
4,7	0,5240	0,2470	0,6324	-0,0921
4,8	0,5236	0,2415	0,6240	-0,0871
4,9	0,5230	0,2362	0,6158	-0,0825
5,0	0,5222	0,2311	0,6078	-0,0782

В точке  $\lambda = 1$  получаем

$$L(1) = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi = -0,6247 \dots \quad (\text{V. 18})$$

В табл. 3 приведены значения функций  $q_0(\lambda)$ ,  $q_1(\lambda)$ ,  $r(\lambda)$ ,  $L(\lambda)$  в области значений  $0 < \lambda \leq 5$ .

# УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Система единиц:  $\hbar = c = 1$ .

Метрика в лоренцевом пространстве:  $g_{00} = -g_{ii} = 1$ .

(В более ранних работах, посвященных теме этой книги, часто использовалась противоположная метрика:  $g_{00} = -g_{ii} = -1$ .)

В тексте повсеместно используется эйнштейновское обозначение суммирования повторением индекса.

Индексы: как правило, латинские индексы  $i, j, k, \dots$  пробегают значения от 1 до 3, греческие индексы  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  — от 1 до 2, а греческие индексы  $\mu, \nu, \dots, \rho$  — от 0 до 3. Исключения легко видны из текста.

Координаты: пространственно-временные координаты  $x, y, z, \dots$

$$x^\nu = (t, \mathbf{r}).$$

Векторы энергии-импульса  $p, q, r, \dots, k \dots$

$$p^\nu = (E, \mathbf{p}).$$

Полевые операторы:  $\psi(x), \chi(x), \dots$

Представления состояний:

$$\tau(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots), \quad \varphi(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots),$$

$$\eta(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots), \quad \zeta(x_1 x_2 \dots | y_1 y_2 \dots).$$

Функционалы:  $\tilde{T}, \tilde{\Phi}, \tilde{H}, \tilde{Z}$ . Параметры непрерывных групп:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Звездочка (\*) означает эрмитово (или псевдоэрмитово) сопряжение  $q$ -числа и комплексное сопряжение  $c$ -числа. Коммутатор:

$$[A, B] = AB - BA,$$

$$\{A, B\} = AB + BA;$$





Матричные элементы между вакуумом и состоянием частицы:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) & \text{ (diagram) } , & \varphi(xxy) & \text{ (diagram) } , \\ \varphi(xyz) & \text{ (diagram) } , & \zeta(xyz) & \text{ (diagram) } . \end{aligned}$$

Каждая глава книги разделена на параграфы. Формулы нумеруются в каждой главе отдельно.

Таблица 4

Таблица элементарных частиц \*

## Бозоны

Символ	Масса, Мэв	Изо-спин	Спин	$P$	$G$	$C^{**}$	$\frac{1}{2} \gamma = u$	Среднее время жизни, сек	Ширина линии, Мэв
$\gamma$	0		1	—		—	0	$\infty$	0
$\pi$ $\left\{ \begin{array}{l} \pi^\pm \\ \pi^0 \end{array} \right.$	139,58	1	0	—	—		0	$2,55 \cdot 10^{-8}$	$2,58 \cdot 10^{-14}$
	134,97	1	0	—	—	+	0	$1,78 \cdot 10^{-16}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$
$K$ $\left\{ \begin{array}{l} K^\pm \\ K^0 \end{array} \right.$	493,8	1/2	0	—			$\pm 1/2$	$1,23 \cdot 10^{-8}$	$5,34 \cdot 10^{-14}$
	497,7	1/2	0	—			$\pm 1/2$	$\left\{ \begin{array}{l} K_1 0,88 \cdot 10^{-10} \\ K_2 5,77 \cdot 10^{-8} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 7,47 \cdot 10^{-12} \\ 1,14 \cdot 10^{-14} \end{array} \right.$
$\eta$	548,8	0	0	—	+	+	0	$> 6,6 \cdot 10^{-23}$	$< 10$
$\kappa$	725	1/2	0	+			$\pm 1/2$	$> 5,5 \cdot 10^{-23}$	$< 10$
$\rho$	765	1	1	—	+	—	$n$	$5,3 \cdot 10^{-24}$	124
$\omega$	782,8	0	1	—	—	—	0	$5,5 \cdot 10^{-23}$	12
$K^*$	891,4	1/2	1	—	—	—	$\pm 1/2$	$1,3 \cdot 10^{-23}$	49
$X^0$	958,6	0	0	—	+	+	0	$> 16 \cdot 10^{-23}$	$< 4$
$\Phi$	1019,5	0	1	—	—	—	0	$2 \cdot 10^{-22}$	3,3
$A_1$	1072	1	1	+	—	+	$n$	$5,2 \cdot 10^{-24}$	125
$C$	1215	1/2 ?					$\pm 1/2$	$1,1 \cdot 10^{-23}$	60
$B$	1220	1	1 ?		+	—	$n$	$5,2 \cdot 10^{-24}$	125
$f$	1253	0	2	+	+	+	0	$5,6 \cdot 10^{-24}$	118
$D$	1286	0	1	+	+	+	0	$1,6 \cdot 10^{-23}$	40
$A_2$	1324	1	2	+	—	+	$n$	$7,3 \cdot 10^{-24}$	90
$\kappa^*$	1405	1/2	2	+			$\pm 1/2$	$6,9 \cdot 10^{-24}$	95
$E$	1420	0					0	$1,1 \cdot 10^{-23}$	60
$f'$	1500	0	2	+	+	+	0	$8,2 \cdot 10^{-24}$	80

Продолжение табл. 4

## Фермионы

Символ	Масса, Мэв	Изо- спин	Спин	$P$	$u = \frac{1}{2} Y$	Среднее время жизни, сек	Ширина линии, Мэв
$\nu_e$	0		1/2			$\infty$	0
$\nu_\mu$	0		1/2			$\infty$	0
$e^\pm$	0,5110		1/2			$\infty$	0
$\mu^\pm$	105,66		1/2			$2,2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-16}$
$N \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	938,26 939,55	1/2 1/2	1/2 1/2	+	1/2 1/2	$\infty$ $1,01 \cdot 10^3$	0 $6,5 \cdot 10^{-25}$
$\Lambda$	1115,44	0	1/2	+	0	$2,61 \cdot 10^{-10}$	$2,5 \cdot 10^{-12}$
$\Sigma \begin{cases} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{cases}$	1189,4 1192,3 1197,2	1 1 1	1/2 1/2 1/2	+	0 0 0	$0,79 \cdot 10^{-10}$ $< 1,0 \cdot 10^{-14}$ $1,58 \cdot 10^{-10}$	$8,3 \cdot 10^{-12}$ $< 6,6 \cdot 10^{-8}$ $4,2 \cdot 10^{-12}$
$N^*$	1236	3/2	3/2	+	1/2	$5,5 \cdot 10^{-24}$	120
$\Xi \begin{cases} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{cases}$	1314,3 1320,8	1/2 1/2	1/2 1/2	+	-1/2 -1/2	$3,05 \cdot 10^{-10}$ $1,75 \cdot 10^{-10}$	$2,2 \cdot 10^{-12}$ $3,8 \cdot 10^{-12}$
$Y_2^*$	1382,7	1	3/2	+	0	$1,5 \cdot 10^{-23}$	44
$Y_0^*$	1405	0	1/2	-	0	$1,9 \cdot 10^{-23}$	35
$N^*$	1518	1/2	3/2	-	1/2	$5,5 \cdot 10^{-24}$	120
$Y_0^*$	1520	0	3/2	-	0	$4,1 \cdot 10^{-23}$	16
$\Xi^*$	1530	1/2	3/2	+	-1/2	$0,88 \cdot 10^{-22}$	7,5
$Y_1^*$	1660	1	$\geq 3/2$		0	$1,5 \cdot 10^{-23}$	44
$\Omega_1^*$	1675	0	3/2	+	-1	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$5,1 \cdot 10^{-12}$
$N^*$	1688	1/2	5/2	+	1/2	$6,6 \cdot 10^{-24}$	100
$Y_1^*$	1765	1	5/2	-	0	$0,88 \cdot 10^{-23}$	75
$Y_0^*$	1815	0	5/2	+	0	$1,3 \cdot 10^{-23}$	50
$\Xi^*$	1816	1/2	3/2	-	-1/2	$4,1 \cdot 10^{-23}$	16
$N^*$	1924	3/2	7/2	+	1/2	$3,3 \cdot 10^{-24}$	200
$\Xi^*$	1933	1/2	5/2	+	-1/2	$4,7 \cdot 10^{-24}$	140
$Y_1^*$	2065	1	7/2	+	0	$4,1 \cdot 10^{-24}$	160
$N^*$	2190	1/2	7/2	-	1/2	$3,3 \cdot 10^{-24}$	200
$N^*$	2360	3/2	9/2	-	1/2	$3,3 \cdot 10^{-24}$	200
$N^*$	2650	1/2	9/2	+	1/2	$3,3 \cdot 10^{-24}$	200
$N^*$	2825	3/2	11/2	+	1/2	$2,5 \cdot 10^{-24}$	260

\* См. работу [131].

\*\* Индекс  $n$  в седьмом столбце таблицы бозонов означает, что  $S$ -свойство относится к нейтральной частице.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **101**, 533 (1936); **113**, 61 (1939); Nature, **164**, 65 (1949).
2. Fermi E., Progr. Theor. Phys., **5**, 570 (1950); Phys. Rev., **81**, 683 (1951).
3. Heisenberg W., Two lectures, Cambridge Univ. Press, 1949; Physica, **19**, 897 (1953).
4. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A117**, 610 (1928).
5. Anderson C. D., Science, **76**, 238 (1932); Blackett P. M. S., Occhialini G. P. S., Proc. Roy. Soc., **A139**, 699 (1933).
6. Lorentz H. A., Proc. Acad. Sci. Amsterdam, **6**, 809 (1904).
7. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **77**, 1; **78**, 156 (1932).
8. Gell-Mann M., Phys. Rev., **92**, 833 (1953); Nakano T., Nishijima K., Progr. Theor. Phys., **10**, 581 (1953).
9. Pais A., Phys. Rev., **86**, 663 (1952).
10. D'Espagnat B., Prentki J. Nucl. Phys., **1**, 33 (1956).
11. Schwinger J., Phys. Rev., **104**, 1164 (1956).
12. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956) (см. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
13. Marshak R. E., Sudarshan E. C. G., Introduction to Elementary Particle Physics, Interscience, New York, 1961 (см. перевод: Маршак Р., Судершан Э., Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962).
14. Nishijima K., Progr. Theor. Phys., **6**, 614, 1027 (1951).
15. Lee T. D., Yang C. N., Nuovo Cimento, **3**, 749 (1956).
16. Gell-Mann M., Cal. Tech. Rept. CTSL-20, 1961 (см. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964).
17. Ne'eman Y., Nucl. Phys., **26**, 222 (1961) (см. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964).
18. Okubo S., Progr. Theor. Phys., **27**, 949 (1962).
19. Gell-Mann M., Proc. Intern. Conf. High Energy Phys. CERN, 1962, p. 805.
20. Barnes V. E., et al., Phys. Rev. Lett., **12**, 204 (1964).
21. Lindern L., Zs. Naturforsch., **11a**, 340 (1956); Nuovo Cimento, **5**, 491 (1957).
22. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М. — Л., 1957.

23. Schweber S. S., An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Evanston, 1961 (см. перевод: Швeбeр С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963).
24. Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., **52**, 54 (1937).
25. Wheeler J. A., Phys. Rev., **52**, 1107 (1937).
26. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **120**, 513, 673 (1943).
27. Møller C., Kgl. Dansk Vidensk. Selsk. Math. Fys. Medd., **23**, No. 1 (1945); **24**, No. 19 (1946).
28. Toll J., Thesis, Princeton Univ., 1952; Phys. Rev., **104**, 1760 (1956).
29. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W., Phys. Rev., **95**, 1612 (1954) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 2, 1957).
30. Goldberger M. L., Phys. Rev., **97**, 508 (1955) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 2, 1957).
31. Nambu Y., Phys. Rev., **98**, 803 (1955).
32. Goldberger M. L., Phys. Rev., **99**, 973 (1955) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 2, 1957).
33. Goldberger M. L., Miyazawa H., Oehme R., Phys. Rev., **99**, 986 (1955) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 2, 1957).
34. Symanzik K., Phys. Rev., **105**, 743 (1957).
35. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; Fort. d. Phys., **6**, 169 (1958).
36. Lehmann H., Nuovo Cimento, **10**, 579 (1958) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 3, 1959); Nuovo Cimento, Suppl., **14**, 153 (1959).
37. Feldman G., Matthews P. T., Phys. Rev., **102**, 1421 (1956).
38. Chew G. F., Goldberger M. L., Low E. F., Nambu Y., Phys. Rev., **106**, 1337, 1345 (1957).
39. Jordan P., Klein O., Zs. f. Phys., **45**, 751 (1927); Jordan P., Wigner E., Zs. f. Phys., **47**, 631 (1928).
40. Haag R., Colloque internat. sur les problèmes de la théorie quantique des champs, Lille, 1957; Phys. Rev., **112**, 669 (1958); Ann. Phys., **11**, 29 (1963).
41. Heisenberg W., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, **IIa**, 111 (1953) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
42. Heisenberg W., Zs. Naturforsch., **9a**, 292 (1954) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
43. Heisenberg W., Naturwiss., **50**, 3 (1963).
44. Streater R. F., Wightman A. S., PCT, Spin and Statistics and All That, Benjamin, New York, 1964 (см. перевод: Стри-тер Р., Вайтман А., PCT, спин, статистика и все такое, М., 1966).
45. Jost R., The General Theory of Quantized Fields, Am. Math. Soc. Publications, 1963 (см. перевод. Йост Р., Общая теория квантованных полей, изд-во «Мир», 1967).
46. Wightman A. S., Phys. Rev., **101**, 860 (1956).

47. Wightman A. S., в сб. *Les Problèmes Mathématiques de la Théorie des Champs*, CNRS, Paris, 1959 (см. перевод в сб. «Математика», **6**: **4**, 96 (1962)).
48. Wightman A. S., *Recent Achievements of Axiomatic Field Theory*, Theoretical Physics, IAEA, Vienna, 1963.
49. Haag R., *Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk. Math. Fys. Medd.*, **29**, No. 12 (1955).
50. Haag R., в сб. *Les Problèmes Mathématiques de la Théorie des Champs*, CNRS, Paris, 1959 (см. перевод в сб. «Математика», **6**: **4**, 134 (1962)).
51. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., *Nuovo Cimento*, **1**, 205; **2**, 425 (1955); **6**, 319 (1957).
52. Bleuler K., *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567 (1950).
53. Gupta S., *Proc. Phys. Soc.*, **A63**, 681 (1950); **A64**, 850 (1951).
54. Heisenberg W., *Nucl. Phys.*, **4**, 532 (1957) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
55. Nagy K. L., *Nuovo Cimento, Suppl.*, **17**, 92 (1960).
56. Pandit L. K., *Nuovo Cimento, Suppl.*, **10**, 157 (1959).
57. Schlieder S., *Zs. Naturforsch.*, **15a**, 448, 460, 555 (1960).
58. Scheibe E., *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, **A1**, 294 (1960).
59. Dürr H. P., Heisenberg W., Mitter H., Schlieder S., Yamazaki K., *Zs. Naturforsch.*, **14a**, 441 (1959) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
60. Dürr H. P., *Zs. Naturforsch.*, **16a**, 327 (1961).
61. Lüders G., *Kgl. Dansk Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, **28**, No. 5 (1954); *Ann. Phys.*, **2**, 1 (1957).
62. Pauli W., в книге *Niels Bohr and The Development of Physics*, New York, 1955 (см. перевод в сб. «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958).
63. Umezawa H., Kametuchi S., *Progr. Theor. Phys.*, **6**, 543 (1951).
64. Källén G., *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952).
65. Gell-Mann M., Low F., *Phys. Rev.*, **95**, 1300 (1954) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 3, 1955).
66. Lehmann H., *Nuovo Cimento*, **11**, 342 (1954) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 3, 1955).
67. Schwinger J., *The Theory of Coupled Fields*, Lecture Harvard, 1954 (не опубликовано).
68. Mitter H., *Nuovo Cimento*, **32**, 1789 (1964).
69. Heisenberg W., *Zs. Naturforsch.*, **10a**, 425 (1955).
70. Heisenberg W., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 269 (1957) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
71. Lee T. D., *Phys. Rev.*, **95**, 1329 (1954).
72. Källén G., Pauli W., *Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk. Math. Fys. Medd.*, **30**, No. 7 (1955) (см. перевод в УФН, **60**, 425 (1956)).
73. Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, **144**, 1 (1956) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
74. Heisenberg W., *Nucl. Phys.*, **4**, 532 (1957); **5**, 195 (1958).
75. Heisenberg W., *Proc. 1960 Intern. Conf. High Energy Phys. Rochester*, p. 851.

76. Heisenberg W., Proc. 1962 Intern. Conf. High Energy Phys. CERN, p. 675.
77. Nambu Y., Proc. 1960 Intern. Conf. High Energy Phys. Rochester, p. 857; Phys. Rev., **117**, 648 (1960); Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., **122**, 345 (1961).
78. Dürr H. P., Heisenberg W., Zs. Naturforsch., **16a**, 726 (1961).
79. Dürr H. P., Heisenberg W., Nuovo Cimento, **37**, 1446 (1965).
80. Goldstone J., Nuovo Cimento, **19**, 154 (1961).
81. Goldstone J., Salam A., Weinberg S., Phys. Rev., **127**, 965 (1962).
82. Bludman S., Klein A., Phys. Rev., **131**, 2364 (1963).
83. Klein A., Lee B. W., Phys. Rev. Let., **12**, 266 (1964).
84. Guralnik G. S., Phys. Rev., **136B**, 1404, 1417 (1964).
85. Guralnik G. S., Hagen R., Kibble T. W., Phys. Rev. Let., **13**, 585 (1964).
86. Nambu Y., Phys. Rev. Let., **9**, 214 (1964).
87. Bloch F., Zs. f. Phys., **61**, 206 (1930).
88. Nambu Y., Progr. Theor. Phys., **5**, 614 (1950).
89. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 3, 1955).
90. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **84**, 350 (1951) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 10, 1955).
91. Bethe H. A., Salpeter E. E., Phys. Rev., **84**, 1232 (1951) (см. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
92. Fredholm E. I., Acta Math., **21**, 365 (1903).
93. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749, 769 (1949) (см. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
94. Freese E., Zs. Naturforsch., **8a**, 776 (1953).
95. Тамм И. Е., Journ. Phys. (USSR), **9**, 449 (1945).
96. Dancoff S. M., Phys. Rev., **78**, 382 (1950).
97. Dyson F. J., Phys. Rev., **90**, 994 (1953).
98. Zimmermann W., Nuovo Cimento Suppl., **11**, 43 (1954) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 10, 1955).
99. Stumpf H., Wagner F., Wahl F., Zs. Naturforsch., **19a**, 1254 (1964).
100. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951) (см. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
101. Zimmermann W., Nuovo Cimento, **13**, 503 (1959).
102. Freese E., Nuovo Cimento, **11**, 312 (1959).
103. Dhar J., Katayama Y., Nuovo Cimento, **36**, 533 (1965).
104. Heisenberg W., Kortel H., Mitter H., Zs. Naturforsch., **10a**, 425 (1955) (см. перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
105. Stumpf H., Yamamoto H., Zs. Naturforsch., **20a**, 1 (1965).
106. Yamazaki K., Nuovo Cimento, **37**, 1143 (1965).
107. Scotti A., Wong D. Y., Phys. Rev. Let., **10**, 142 (1963).
108. Cutkosky R. E., Leon M., Phys. Rev., **135B**, 1445 (1964).

109. C z i f f r a P., M o r a v c s i k M. J., Phys. Rev., **116**, 226 (1959).
110. L e e T. D., Y a n g C. N., Phys. Rev., **119**, 1410 (1960).
111. R u s s e l l H. N., S a u n d e r s F. A., Astrophys. Journ., **61**, 38 (1925).
112. H e i s e n b e r g W., Zs. f. Phys., **49**, 619 (1928).
113. Д ж о н с о н К., Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий, т. I, М., 1966.
114. D ü r r H. P., H e i s e n b e r g W., Y a m a m o t o H., Y a m a z a k i K., Nuovo Cimento, **38**, 1220 (1965).
115. S o m m e r f e l d A., Ann. Phys., **51**, 1 (1916).
116. W a r d J. S., Phys. Rev., **78**, 182 (1950).
117. C h e w G. F., M a n d e l s t a m S., Nuovo Cimento, **19**, 752 (1961).
118. R e g g e T., Nuovo Cimento, **14**, 951 (1959); **18**, 947 (1960) (см. перевод в сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
119. S u d a r s h a n E. C. G., M a r s h a k R. E., Phys. Rev., **109**, 1860 (1958).
120. F e y n m a n R. P., G e l l - M a n n M., Phys. Rev., **109**, 193 (1958) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 4, 1958).
121. H e i s e n b e r g W., Niels Bohr Memorial Meeting, Copenhagen, 1963.
122. H o f s t a d t e r R., Ann. Rev. Nucl. Sci., **7**, 231 (1957).
123. J o r d a n P., P a u l i W., Zs. f. Phys., **47**, 151 (1928).
124. S c h w i n g e r J., Phys. Rev., **75**, 651 (1949) (см. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
125. S t ü c k e l b e r g E. C. G., R i v i e r D., Helv. Phys. Acta, **22**, 215 (1949); R i v i e r D., Helv. Phys. Acta, **22**, 265 (1949).
126. S y m a n z i k K., Диссертация, Univ. Göttingen, 1954; Zs. Naturforsch., **9a**, 809 (1954).
127. R a m p a c h e r H., S t u m p f H., W a g n e r F., Fortschr. Phys., **13**, 385 (1965).
128. D o n n a c h i e A., H a m i l t o n J., Phys. Rev., **133B**, 1053 (1954); **138B**, 678 (1965).
129. T h i r r i n g W., Fortschr. Phys., VII, 2, 79—101 (1959).
130. И в а н е н к о Д., Гравитация и возможности единой теории, в сб. «Проблемы гравитации», Тезисы Второй советской гравитационной конференции, Тбилиси, 1965.
131. R o s e n f e l d A. H., B a r b a r o - G a l t i e r i A., B a r k a s W. H., B a s t i e n P. L., K i r z J., R o o s M., UCRL-8030, Part I, August 1965.
132. D e B r o g l i e L., B o h m D., H i l l i o n P., H a l b w a c h s F., T a k a b a y a s i T., V i g i e r J. P., Phys. Rev., **129**, 438 (1963); d e B r o g l i e L., H a l b w a c h s F., H i l l i o n P., T a k a b a y a s i T., V i g i e r J. P., Phys. Rev., **129**, 451 (1963).
133. И в а н е н к о Д., Изв. вузов, сер. физ., № 3 (1965).
134. К у р д г е л а и д з е Д. Ф., Cahiers de Physique, **15**, 149 (1961).



## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА <sup>1)</sup>

1. «Нелинейная квантовая теория поля», сб. переводов под ред. Д. Иваненко, ИЛ, 1959.  
Основные работы группы Гейзенберга и ряда других авторов вплоть до 1959 г. По ним, в частности, прослеживается эволюция взглядов Гейзенберга начиная с добавления нелинейного члена в уравнении Дирака и использования нелинейного члена в уравнении Дирака и использования indefinитной метрики в гильбертовом пространстве. Вступительная статья редактора перевода посвящена изложению истории вопроса.
2. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», сб. переводов под ред. Д. Иваненко, изд-во «Мир», 1964.  
Теория компенсирующих полей типа Янга — Миллса, которые, по-видимому, тесно связаны с голдстоуновскими бозонами. Рассмотрены также групповые подходы начала 60-х годов.
3. Nagy K. L., State vector spaces with indefinite matrices in quantum field theory, Budapest, 1966.  
Полный обзор работ, посвященных построению квантовой теории поля с indefinитной метрикой и ее вероятностной интерпретации.
4. «Труды совещания по нелокальной теории поля», ОИЯИ, Дубна, 1967.  
В докладах подробно анализируются принципы теории, отказывающейся от взаимодействия полей в точке, и обсуждаются границы возможной нелокальности.
5. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», Киев, 1967.  
Труды Ялтинской международной школы по теоретической физике, где читались лекции по теории групп, симметриям, теории взаимодействий, модели кварков и т. д.
6. Чью Г., Аналитическая теория S-матрицы, изд-во «Мир», 1968.  
Резко полемическая книга, направленная против динамического и лагранжева подходов в квантовой теории поля и излагающая «аналитический» подход к физике частиц, основанный на дисперсионных соотношениях, poloлогии Редже и идее бутстрепа. Вместе с Гейзенбергом Чу не считает  $SU_3$  фундаментальной симметрией и не признает гипотезы кварков.
7. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Доклады Высшей школы, 1, 1 (1959).

<sup>1)</sup> Добавлена редактором перевода. — *Прим. ред.*

- Построена модель теории поля с индефинитной метрикой, в которой можно сконструировать унитарную матрицу рассеяния.
8. Славнов Д. А., Суханов А. Д., *ЖЭТФ*, **36**, 1472 (1959). Показано, что в определенном классе моделей с индефинитной метрикой пространств состояний начиная с 4-го порядка теории возмущений не удастся одновременно удовлетворить условиям унитарности и макропричинности.
  9. Максимов Л. А., *ЖЭТФ*, **36**, 465 (1959). Показано, как в теориях с индефинитной метрикой можно построить унитарную матрицу рассеяния без нарушения макропричинности.
  10. Вакс В. Г., Ларкин А. И., *ЖЭТФ*, **40**, 282 (1961). Одновременно и независимо от Намбу [77] предложен сверхпроводящий вариант нелинейной спинорной теории, в котором масса фермиона является аналогом щели в энергетическом спектре элементарных возбуждений сверхпроводящего состояния.
  11. Вакер М., Glashow S. L., *Phys. Rev.*, **128**, 2462 (1962). Впервые четко сформулирована идея возможности спонтанного нарушения симметрии, т. е. существования решений с симметрией более низкой, чем у лагранжиана. Приведен ряд примеров.
  12. Иваненко Д., *Atti del Convengo sulla Relativita Generale*, Firenze, 1964 (доклад на галилеевской конференции), *Nuovo Cimento*, **51A**, 244 (1967); *Colloque gravitationel*, Paris, 1968. Указание на целесообразность построения  $SU_3$ -инвариантной нелинейной теории; предлагается связать асимметрии основного состояния (вакуума) с асимметриями реальной вселенной.
  13. Наумов А. И., *ЖЭТФ*, **47**, 914 (1964); *Вестник Моск. унив., сер. физ.-астр.*, № 2 (1967); *Вестник Моск. унив., сер. физ.-астр.*, № 1 и 2 (1968); *Ядерная физика*, **6**, 664 (1968). Рассмотрен ряд моделей теории поля с вырождением вакуума (в частности, по гиперзаряду и унитарному спину). Исследована возможность построения физически интерпретируемых теорий с индефинитной метрикой. К вычислению масс частиц и констант связи применена модифицированная теория возмущений.
  14. Dügg H. P., Wagner F., *Nuovo Cimento*, **46A**, 223 (1966). Нелинейная спинорная теория сформулирована в терминах эрмитовых спинорных операторов поля, что позволяет сильно упростить расчеты спектра масс и констант связи.
  15. Kastler D., Robinson D., Swieca Y. A., *Commun. Math. Phys.*, **2**, 108 (1966). Теорема Голдстоуна в алгебраическом аксиоматическом подходе.
  16. Галанин А. Д., *Ядерная физика*, **4**, 205 (1966). В рамках нелинейной спинорной теории исследовано поведение антикоммутирующего в вершине светового конуса. Показано, что каноническое квантование запрещено, но в коммутационных соотношениях должна оставаться все же некоторая сингулярность. Такая схема не является гамильтоновой.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиоматическая формулировка теории поля** 38  
**Ангармонический осциллятор** 77, 96, 110  
**Асимптотические состояния** 35, 41, 174, 175, 190, 208  
**Асимптотический полевой оператор** 26, 32—35, 39, 69, 118  
**Барионное число** 48, 143, 182  
**Барионы, определение и классификация** 20  
 — полюс 112, 160, 168  
**Бете — Салпетера уравнение** 74, 125  
**Блоховские спиновые волны** 67, 133—138  
**Бозе — Эйнштейна статистика** 20, 141  
**Бозоны векторные** 150  
 — определение и классификация 20  
 — полюс 94, 121, 147  
 — пропагатор 111, 122  
 — странные 144  
 — уравнение на собственные значения 87, 92, 93, 97, 111  
**Бутстреп** 172  
**Вайтмана формулировка** 39  
**Взаимодействие и локальная теория поля** 31, 35, 36, 39, 40, 94, 190  
 — классификация 18  
**Вика произведение** 46, 54, 55  
**Возбужденный электрон** 132—136  
**Возмущений теория** 74, 80, 120, 163  
**Времени обращение** 51  
**Гильбертово пространство** 35—36, 58, 176, 200  
**Гиперзаряд** 16, 157, 161, 178  
**Гиперон  $\Omega^-$**  17  
**Голдстоуна теорема (частицы)** 57, 67, 153, 175, 178—182, 189  
**Граничные условия** 36, 74, 103—107, 124, 139, 182, 190  
**Грина функция** 76, 77, 93, 139, 164, 225  
**Группа компактная и некомпактная** 39  
 — представление 15—17, 39  
 —  $SU_2$  см. Изоспина группа  
 —  $SU_3$  9, 18, 21, 144, 146, 175, 183  
 —  $SU_6, U_{12}$  9, 175, 183  
**Двойной полюс** 59, 62, 103, 147;  
 см. также Ли модель  
**Двухточечная функция регуляризованная** 60, 65, 147, 148, 174, 193  
 — — свободного поля 26  
 — — фундаментального поля 33, 53, 67, 72, 75, 80—85, 113, 125, 158, 190, 219  
**Диполь** 58  
**Дискретные группы** 16, 50  
**Дисперсионные соотношения** 8, 23, 31, 174—175  
**Единая теория поля** 7, 8, 122, 173—174, 189—190  
**Зарядовое сопряжение** 16, 18, 51, 112, 178  
**Изоспина группа** 16, 20, 45, 46, 50, 54, 67, 129, 141; см. также Электромагнитные взаимодействия  
**Инвариантность  $CPT$**  18, 20, 51  
 —  $PG$  51, 98

- Индефинитная метрика 8, 39, 41, 58, 148, 190; см. также Ли модель
- Интегральные уравнения 74, 82, 83, 86, 96, 110
- Интегральный оператор 219
- Инфракрасные кванты (частицы) 27, 130, 138
- Каноническое квантование 35, 80  
— преобразование 176
- Квантование 83
- Квантовая механика 12  
— — и квантовая химия 12, 190  
— — — релятивистская теория поля 12, 39, 74, 85, 94, 126  
— электродинамика 24, 39, 48, 153, 193
- Квантовое число 16, 33, 50
- Ковариантные компоненты 42  
— представления 25, 75
- Коммутатор (анти-) 35  
— и двухточечная функция 57—62, 85
- Константы связи 8, 94, 115, 164, 173, 179
- Контактное взаимодействие 151—152, 177
- Контравариантные компоненты 42  
— представления 25
- Кроссинг-симметрия 32, 38, 126
- Лептонное число 16, 20, 49, 169, 182
- Лептоны 20, 65, 158, 160, 163, 217; см. также Слабые взаимодействия
- Ливни высокой энергии 182
- Ли модель 8, 65, 193
- Локальные законы сохранения 68  
— полевые операторы 32, 38, 39, 80
- Лоренца группа 16, 25, 45, 47, 49—54, 112, 141  
— условие 97
- Масштабная инвариантность 49—54, 56—60, 132, 158, 168, 183
- Матрица рассеяния (*S*-матрица) 27, 189
- — аналитичность 29, 174  
— — и бутстреп 172  
— — — полевые операторы 36  
— — —  $\eta$ -функции 90  
— — полюсное приближение 116, 125, 126  
— — унитарность 41, 65, 205, 209—211
- Мезоны векторные 103, 106, 111, 147, 151, 177  
— *K* 113, 144, 146, 177  
—  $\eta$  7, 102, 110—112, 121  
—  $\pi$  (пионы) 102, 109, 111, 112, 121  
—  $\rho$  103, 172, 173
- Нормировка 125
- Одевание фермионных линий 94, 121, 122  
— частиц 136, 166
- Основное состояние, асимметрия или вырождение 7, 66, 129  
— — представление 79, 90
- Перенормировка 163, 164, 203
- Полюса двухточечной функции 26, 33, 36, 60, 93, 103, 132, 138, 163, 164, 165, 175  
— Редже 8, 175
- Поляризация 19, 97 160
- Постоянная тонкой структуры 165, 166, 181
- Преобразование *PC* 18, 51  
— *PG* 51, 112
- Приближения высшие 106, 109, 110, 135, 136, 209
- Приближенные методы 73  
— симметрии 16, 17, 45, 48, 56, 129, 153, 189
- Призрачные и дипольные состояния 44, 62, 103, 104, 160, 166, 208
- Причинность и аналитичность 30—31, 38, 173  
— и взаимодействие 23  
— условие 30, 53, 62, 140
- Проекционный оператор 122, 155, 160
- Псевдовекторная (псевдоскалярная) связь 123

- Псевдоунитарное преобразование 57, 208
- Резонансное состояние 15, 184
- Свободная частица 25, 36, 70
- Сильные взаимодействия 18—20, 178
- Симметрии 15—18, 28, 47—53, 175—178
- Слабые взаимодействия 18—20, 153, 178—182
- Собственные состояния энергии и импульса 41, 64
- Сохранения законы 15—18, 28, 47—53
- Спурионы 132, 134, 139, 149, 150
- Странность 16
- Странные частицы 7, 50, 111, 129
- Суперотбора правила 39
- Тамма — Данкова метод 76, 80—86, 110, 112, 121, 164, 173, 215
- Ток векторный 69, 154, 179  
— псевдовекторный 69, 154
- Унитарное преобразование 8, 57, 176
- Унитарность см. Матрица рассеяния
- Уорда тождество 168
- Фейнмановские диаграммы 86, 90, 173
- интегралы 100, 107, 211
- Ферми — Дирака статистика 20
- Фермионы, определение и классификация 20  
— полюс 91, 109  
— странные 146  
— уравнение на собственные значения 91, 106, 111, 147—151
- Ферромагнетика модель 132, 157
- Фирца симметрия 98, 142
- Фотон 7, 12, 23, 57, 132, 139, 178, 189, 217; см. также Квантовая электродинамика
- Фредгольма уравнение см. Интегральные уравнения
- Функционал 213
- Четность 16, 18, 50—51, 112, 180
- Четырехточечная функция 66, 76, 86, 90, 121, 148, 178
- Швингера функция 31, 190
- Шизоны 130
- Электромагнитные взаимодействия 18—21, 48, 61; см. также Квантовая электродинамика
- Элементарная частица 7, 11, 15, 20, 32

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	7
<b>Глава 1. Основные экспериментальные данные</b> . . . . .	11
§ 1. Определение элементарной частицы . . . . .	11
§ 2. Классификация элементарных частиц . . . . .	15
§ 3. Различные типы взаимодействий . . . . .	18
§ 4. Спектр элементарных частиц . . . . .	20
§ 5. Взаимодействие и причинность . . . . .	23
<b>Глава 2. Математический аппарат</b> . . . . .	25
§ 1. Математическое описание свободных частиц . . . . .	25
§ 2. $S$ -матрица . . . . .	27
§ 3. Полевые операторы . . . . .	32
§ 4. Связь между полевыми операторами и $S$ -матрицей . . . . .	36
§ 5. Аксиоматическая формулировка . . . . .	38
§ 6. Гильбертово пространство с индефинитной метрикой . . . . .	41
<b>Глава 3. Фундаментальное полевое уравнение</b> . . . . .	45
§ 1. Математическая форма полевого уравнения . . . . .	45
§ 2. Групповая структура фундаментального уравнения . . . . .	47
§ 3. Двухточечная функция Грина и антикоммутиратор . . . . .	53
§ 4. Призрачные и дипольные состояния в двухточечной функции . . . . .	62
§ 5. Асимптотические свойства четырехточечной функции и вырождение основного состояния . . . . .	66
§ 6. Проблема локальных законов сохранения . . . . .	68
<b>Глава 4. Приближенные методы</b> . . . . .	73
§ 1. Общие замечания о приближенных методах в квантовой теории поля . . . . .	73
§ 2. Приближенные представления векторов состояния усеченными наборами функций . . . . .	75
§ 3. Новый метод Тамма — Данкова . . . . .	80
§ 4. Описание интегральных уравнений с помощью фейнмановских диаграмм . . . . .	86
§ 5. Нелинейные задачи; $\eta$ -функции и $S$ -матрица . . . . .	90
<b>Глава 5. Решение простейших уравнений на собственные значения</b> . . . . .	97
§ 1. Низшие бозонные состояния . . . . .	97
§ 2. Сингулярность бозонной волновой функции в импульсном пространстве . . . . .	103
§ 3. Простейшие фермионные состояния . . . . .	106
§ 4. Высшие приближения . . . . .	110
§ 5. Четность собственных состояний . . . . .	112
<b>Глава 6. Теория констант связи</b> . . . . .	115
§ 1. Предварительные замечания и определение констант связи . . . . .	115

§ 2. Связь $\pi$ - и $\eta$ -мезонов с барионами . . . . .	120
§ 3. Нормы бозонных состояний . . . . .	124
§ 4. Некоторые общие замечания о «полюсном» приближении для $S$ -матричных элементов . . . . .	126
<b>Глава 7. Странные частицы . . . . .</b>	<b>129</b>
§ 1. Вырождение основного состояния . . . . .	129
§ 2. Сравнение с упрощенной моделью ферромагнетизма . . . . .	132
§ 3. «Спурионный» формализм . . . . .	139
§ 4. Странные бозоны . . . . .	144
§ 5. Странные фермионы . . . . .	146
<b>Глава 8. Квантовая электродинамика . . . . .</b>	<b>153</b>
§ 1. Теорема Голдстоуна . . . . .	153
§ 2. Масштабное преобразование . . . . .	158
§ 3. Собственная функция фотона . . . . .	160
§ 4. Фотонное уравнение на собственные значения и константа связи . . . . .	164
§ 5. Особые свойства фотона и электромагнитного поля . . . . .	166
§ 6. Лептонные массы . . . . .	168
<b>Глава 9. Связь единой теории поля с феноменологическими теориями . . . . .</b>	<b>172</b>
§ 1. Так называемый метод бутстрепа . . . . .	172
§ 2. Аналитическое поведение $S$ -матричных элементов . . . . .	174
§ 3. Приближенные симметрии ( $SU_3$ , $SU_6$ и т. д.) . . . . .	175
§ 4. Слабые взаимодействия . . . . .	178
§ 5. Каскадные ливни высокой энергии . . . . .	182
<b>Глава 10. Заключительные замечания . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>Математические приложения</b>	
I. Двухточечные функции линейной теории поля . . . . .	190
II. Модель Ли . . . . .	193
§ 1. Описание модели . . . . .	193
§ 2. Решение уравнения Шредингера в секторе $\begin{pmatrix} N + \theta \\ V \end{pmatrix}$ . . . . .	195
§ 3. Обсуждение свойств функции $h(z)$ . . . . .	197
§ 4. Собственные состояния, связанные с двойным полюсом функции $1/h(z)$ . . . . .	200
§ 5. Перенормировка $\psi_V$ . . . . .	203
§ 6. Роль призрачных состояний в задачах рассеяния . . . . .	205
III. Вычисление интегралов в импульсном пространстве . . . . .	211
IV. Функциональное исчисление для бесконечных наборов функций . . . . .	213
V. Аналитические свойства и численные значения некоторых важных функций . . . . .	216
Условные обозначения . . . . .	224
Литература . . . . .	228
Дополнительная литература . . . . .	233
Предметный указатель . . . . .	235